

معادلات شیب افت برای تیر ستون‌های داری نقص اولیه و اتصالات نیمه صلب با لحاظ اثرات برشی

مجتبی فتحی^{۱*}، نیما شهلایی^۲، مهدی پرویزی^۳

۱- استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشگاه رازی کرمانشاه، کرمانشاه

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی، ملایر

۳- دانشجوی دکتری، گروه مهندسی عمران، دانشگاه رازی کرمانشاه، کرمانشاه

*fathim@razi.ac.ir

(تاریخ دریافت: ۹۵/۰۵/۳۰، تاریخ پذیرش: ۹۶/۱۲/۰۱)

چکیده

امروزه غالباً از نرم افزارهای مختلف برای طراحی سازه‌های فولادی استفاده می‌شود. لیکن همچنان تئوری طراحی سازه‌های فولادی به عنوان پایه‌ای برای نرم افزارهای مختلف جایگاه خود را دارد. در این میان بررسی پایداری ستون‌ها به عنوان جزئی مهم از سازه، اهمیت زیادی دارد. معمولاً نقص‌های هندسی ستون‌ها در حین نصب از قبیل ناشاغولی، خروج از مرکزیت، انحنای ستون و همچنین اثر تغییر شکل‌های برشی در روابط محاسباتی، همگی انحراف‌هایی از میزان دقت در طراحی را سبب می‌شوند. لذا در این مقاله با ملحوظ کردن اثرات تغییر شکل‌های برشی، به بررسی پایداری ستون‌های با اتصالات نیمه صلب و دارای نقص‌های اولیه پرداخته شده و معادلات شیب افت مربوطه استخراج و پیشنهاد شدند. سپس به کمک نرم‌افزار ABAQUS و مدل‌سازی سه مدل ستون، قاب یک طبقه و قاب سه طبقه، صحت و دقت روابط پیشنهادی تایید شدند.

واژگان کلیدی

معادلات شیب افت، ستون تیموشنکو، نقص اولیه، اتصالات نیمه صلب، پایداری

Slope-Deflection Equations Development for Imperfect Beam-Column and Semi-Rigid Connection, Considering Shear Deformation

M. Fathi, N. Shahlaei, M. Parvizi

Abstract

Nowadays various soft wares are used to design steel structures. The theory of steel structures design, however, is still the base for different soft wares. Studying the stability of columns as important parts of a structure is very important. Usually geometrical deficiencies in the process of installation, such as Nashagholi, decentralization, column deviation and also the effect of shear deformations in computational relations, all lead to some deviations in the design accuracy. Therefore in this article, by considering the effects of shear deformations, the stability of columns or semi-rigid connections with initial imperfection have been studied and the related slope-deflection equations have been extracted and proposed. And thereafter, by means of ABAQUS software and modelling the three models of column, one-story frame and three-story frame, the accuracy and validity of the proposed relations were confirmed.

Keywords

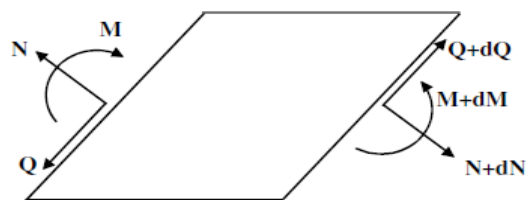
Slope-deflection equations, Timoshenko column, Initial imperfection, Semi-rigid connections, Stability

که $P_E = (\pi^2 EI)/L^2$ ، بار کمانشی بحرانی اوپلر است. L طول کمانشی موثر کمانشی موثر، E و G مدول الاستیک یانگ و مدول برشی، EI و GA سختی خمشی و سختی برشی مقطع عرضی هستند. شکل (۱) فرضیات تئوری انگسر را نمایش می‌دهد. اگر یک ستون تحت کمانش را در نظر بگیریم و یک قسمت از ستون را برش دهیم به المانی مطابق شکل (۱-الف) خواهیم رسید. که Q نیروی برشی، N نیروی محوری و M لنگرخمشی است. انگسر نیروی محوری را مماس بر محور مرکزی المان و نیروی برشی را عمود بر نیروی محوری در نظر می‌گیرد.

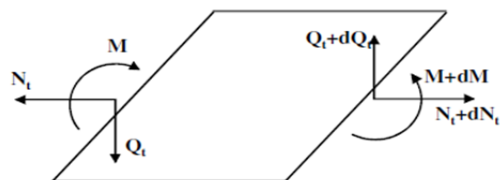
هارینگس نیز در سال ۱۹۴۲ فرمول زیر را برای اولین بار بحرانی در کمانش ستون‌ها با تغییر شکل‌های برشی ارائه داد:

$$P_{Engesser} = \frac{P_{Euler}}{\left(1 + \frac{P_{Euler}}{GA_s}\right)} \quad (2)$$

فرضیات تئوری هارینگس در شکل (۱-ب) آمده است. هارینگس نیروی محوری را عمود بر مقطع عرضی و نیروی برشی را داخل صفحه مقطع عرضی فرض می‌کند.



الف) تئوری انگسر



ب) تئوری هارینگس

شکل ۱- المان دو بعدی تحت تغییر شکل برشی با فرضیات تئوری انگسر و هارینگس

معادلات شیب افت در سال ۱۹۱۵ میلادی بوسیله Wilson و Maney [۱] به عنوان یک روش عمومی برای تحلیل تیرهای با اتصالات صلب تحت بارهای جانبی ارائه گردیدند. سپس روش معادلات شیب-افت کلاسیک توسط Norris و Wilbur [۲] برای تحلیل سازه‌های با اتصال صلب در نظر گرفته شد. Georgios و Charis [۳] با استفاده از معادلات شیب افت، عبارت‌هایی برای محاسبه سختی دورانی اعضای با اتصال نیمه صلب در انتهای نزدیک و شرایط مرزی مختلف در انتهای دور ارائه کردند. Marchis و Chiorean [۴] ماتریس سختی تیرستون‌های غیر منشوری را با احتساب درجات آزادی محوری، خمشی و پیچشی بسط دادند. آریستیزابال اوچوا Aristizabal-Ochoa [۵] معادلات شیب افت مرتبه دوم را برای تیرستون‌های تیموشنکو با اتصالات نیمه صلب ارائه داد. همچنین در سال ۲۰۱۰ Aristizabal-Ochoa [۶] معادلات مرتبه دوم شیب افت را برای تیرستون‌های اولر-برنولی دارای نقص اولیه و اتصالات نیمه صلب ارائه داد. Konstantinos و Charis [۷] با استفاده از معادلات شیب افت، برای اعضای تیموشنکو و با اتصالات نیمه صلب، ضرایب سختی دورانی را برای اعضای با شرایط مرزی مختلف بدست آوردند و برای جایگزینی اعضای متصل به ستون‌ها از آنها استفاده نمودند. Aristizabal-Ochoa [۸] با استفاده از یک روش تکراری و بر مبنای تئوری‌های هارینگس و اولر، تاثیر نقص اولیه، اتصال نیمه صلب غیر خطی، نیروی برشی و تغییر شکل‌های مرتبه دوم را بر روی پایداری ستون‌ها بررسی کرد. اما در تحقیقات انجام شده هیچ اشاره‌ای به معادلات شیب-افت برای اعضای دارای نقص اولیه، با در نظر گرفتن اثرات برشی و اتصالات نیمه صلب نشده است. لذا در این مقاله معادلات شیب افت برای ستون‌های دارای نقص اولیه با اتصالات نیمه صلب با ملحوظ کردن اثرات برشی بر مبنای دو تئوری انگسر [۹] و هارینگس [۱۰] ارائه شده است.

۲- تئوری کمانشی انگسر و هارینگس

اولین تلاش‌ها برای در نظر گرفتن تغییر شکل‌های برشی توسط انگسر (۱۸۹۱)، با اصلاح فرمول کمانشی اوپلر برای ستون‌ها صورت گرفت. او فرمول زیر را برای اولین بار بحرانی کمانشی ستون ارائه داد:

$$P_{cr} = \frac{P_E}{1 + \left(\frac{P_E}{GA}\right)} \quad (1)$$

۳- معادلات شیب-افت پیشنهادی

ستون دو بعدی تیموشنکو با اتصالات انعطاف پذیر انتهایی، دارای انحنای اولیه U_c و ناشاغولی U_p و خروج از مرکزیت U_e نشان داده شده در شکل (۲) را در نظر بگیرید. سختی فنرهای دورانی دو سر ستون K_a و K_b و سختی فنر انتقالی انتهای B ، S_Δ است.

$$M_x = P[u_{ec}(x) + u_c(x)] \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (4)$$

$$\beta EI \frac{d^2 u_{ec}}{dx^2} = -P \left[u_{ec}(x) + a \sin\left(\frac{\pi x}{h}\right) \right] \quad (5)$$

با استفاده از شرایط مرزی $u_{ec}(0) = u_{ec}(h) = 0$ جواب معادله (۳) بدست می‌آید:

$$u_{ec}(x) = \frac{\varphi^2}{\pi^2 - \varphi^2} a \sin\left(\frac{\pi x}{h}\right) \quad (6)$$

که φ تابع پایداری در صفحه خمش بوده و برابر است با: $\varphi^2 = \frac{Ph^2}{\beta EI}$ و β ضریب کاهش برشی است و مطابق تئوری‌های انگسر و هارینگس عبارت است از:

$$(\beta)_{Haringx} = \frac{1}{1 + \frac{P}{GA_s}} \quad (7)$$

$$(\beta)_{Engesser} = 1 - \frac{P}{GA_s} \quad (8)$$

در رابطه (۶)، مقدار حد اکثر خمیدگی در وسط ستون است.

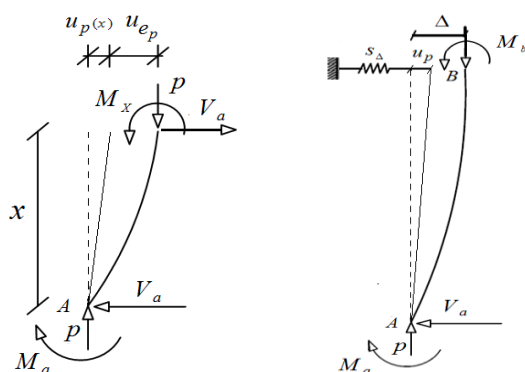
۳-۲- اثر ناشاغولی

در این قسمت انحنای داخلی صفر $u_c = 0$ و مقدار ناشاغولی در بالای ستون u_p فرض می‌شود. با استفاده از تعادل لنگر و نیروهای جانبی روی تیرستون در حالت تغییر شکل یافته آن، داریم:

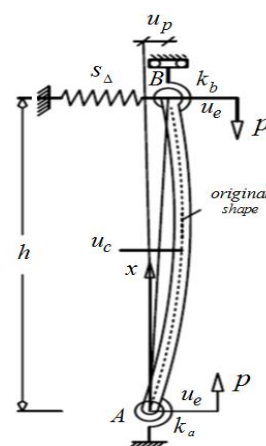
$$\sum M_A = 0 \rightarrow M_a + M_b + P \cdot \Delta - S_\Delta (\Delta - u_p) h = 0 \quad (9)$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow M_a + M_b + P \cdot \Delta + V_a \cdot h = 0 \quad (10)$$

با استفاده از تعادل در فاصله x از نقطه A در شکل (۴) می‌توان نوشت:



شکل ۴- شکل تغییر شکل یافته و نیروهای داخلی ستون مورد مطالعه



شکل ۲- مدل سازه‌ای ستون دارای نقص اولیه تیموشنکو و دارای حرکت جانبی نسبی [۸]

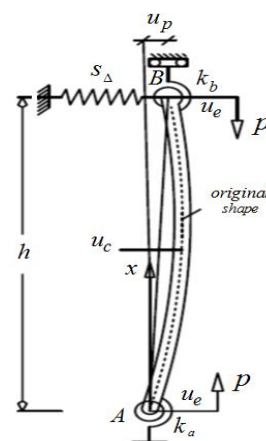
برای یافتن تغییر مکان جانبی ناشی از عوامل فوق، از روش جمع آثار و قوا استفاده می‌شود و برای هر حالت به صورت مجزا اقدام می‌شود و سپس در پایان با استفاده از تئوری‌های انگسر و هارینگس، دوران‌های ناشی از خمش در دو سر ستون را محاسبه و معادلات شیب افت مربوطه استخراج خواهند شد.

۳-۱- اثر انحنای اولیه

محور مرکزی ستون یک خط کاملاً مستقیم نبوده و دارای انحنای اولیه u_c است. این انحنای بوسیله یک موج سینوسی $u_c = a \sin(\frac{\pi x}{h})$ تعریف می‌شود. ابتدا فرض می‌شود که ستون فقط دارای انحنای اولیه u_c بوده و ناشاغولی و خروج از مرکزیت‌ها همگی برابر صفر هستند. لذا خواهیم داشت:

$$M = -\beta EI \frac{d^2 u_{ec}}{dx^2} \quad (3)$$

که u_{ec} تغییر مکان جانبی ناشی از انحنای اولیه است شکل (۳).



شکل ۳- مدل سازه‌ای ستون تیموشنکو دارای نقص اولیه

۳-۴- روش حل به کمک تئوری انگسر

$$Q = V + P \frac{du_e}{dx} + P \frac{du_p}{dx} + P \frac{du_c}{dx} \quad (19)$$

V نیروی برشی در مقطع بدون تغییر شکل است.

$$V = -\frac{M_a + M_b + P\Delta}{h} \quad (20)$$

لذا با داشتن $\frac{du_c}{dx} = \pi \frac{a}{h} \cos\left(\pi \frac{x}{h}\right)$ و $\frac{du_p}{dx} = \frac{u_p}{h}$ خواهیم داشت:

$$Q = P \frac{du_e}{dx} + P \frac{du_p}{dx} + P \pi \frac{a}{h} \cos\left(\pi \frac{x}{h}\right) - \frac{M_a + M_b + P\Delta}{h} \quad (21)$$

عبارت فوق را در معادله (۱۹) قرار می‌دهیم، داریم:

$$\psi = \left(1 - \frac{P}{GA_s}\right) \frac{du_e}{dx} - \frac{P}{GA_s} \left(\frac{\Delta - u_p}{h} - \pi \frac{a}{h} \cos\left(\pi \frac{x}{h}\right) + \frac{M_a + M_b}{Ph}\right) \quad (22)$$

پس:

$$\psi = \beta \frac{du_e}{dx} + (1 - \beta) \left[\frac{\Delta - u_p}{h} - \pi \frac{a}{h} \cos\left(\pi \frac{x}{h}\right) + \frac{M_a + M_b}{Ph} \right] \quad (23)$$

با جایگذاری عبارت مربوط به $\frac{du_e}{dx}$ از معادله (۱۷) در معادله (۲۳) داریم:

$$\psi = \left[\frac{1}{\varphi} - \sin\left(\varphi \frac{x}{h}\right) - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \cos\left(\varphi \frac{x}{h}\right) \right] \frac{M_a h}{\varphi EI} + \left[\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\sin\varphi} \cos\left(\varphi \frac{x}{h}\right) \right] \frac{M_b h}{\varphi EI} + \frac{\Delta - u_p}{h} + \beta \left[\frac{\pi \varphi^2}{\pi^2 - \varphi^2} \times \frac{a}{h} \cos\left(\pi \frac{x}{h}\right) + (1 - \beta) \left[\frac{(M_a + M_b)h}{\beta \varphi^2 EI} - \pi \frac{a}{h} \cos\left(\pi \frac{x}{h}\right) \right] \right] \quad (24)$$

با استفاده از شرایط مرزی $\psi(0) = \psi_a$ و $\psi(h) = \psi_b$ در شکل (۴) عبارت‌های زیر بدست می‌آیند:

$$\psi_a = \left(\frac{\sin\varphi - \beta\varphi\cos\varphi}{\beta\varphi^2\sin\varphi} \right) \frac{M_a h}{EI} + \left(\frac{\sin\varphi - \beta\varphi}{\beta\varphi^2\sin\varphi} \right) \frac{M_b h}{EI} + \frac{\Delta - u_p}{h} + \beta \left[\frac{\pi\varphi^2}{\pi^2 - \varphi^2} \times \frac{a}{h} \right] - (1 - \beta) \left[\pi \frac{a}{h} \right] \quad (25)$$

$$\psi_b = \left(\frac{\sin\varphi - \beta\varphi}{\beta\varphi^2\sin\varphi} \right) \frac{M_a h}{EI} + \left(\frac{\sin\varphi - \beta\varphi\cos\varphi}{\beta\varphi^2\sin\varphi} \right) \frac{M_b h}{EI} + \frac{\Delta - u_p}{h} - \beta \left[\frac{\pi\varphi^2}{\pi^2 - \varphi^2} \times \frac{a}{h} \right] + (1 - \beta) \left[\pi \frac{a}{h} \right] \quad (26)$$

$$M_{(x)} = M_a - \frac{M_a + M_b + P\Delta}{h} x + P(u_{ep} + u_p(x)) \quad (11)$$

می‌دانیم که $u_p(x) = \frac{x u_p}{h}$ پس:

$$\beta EI \frac{d^2 u_{ep}}{dx^2} + P u_{ep} = -M_a + \frac{M_a + M_b + P(\Delta - u_p)}{h} x \quad (12)$$

جواب معادله فوق برابر است با:

$$u_{ep}(x) = A \cos\left(\varphi \frac{x}{h}\right) + B \sin\left(\varphi \frac{x}{h}\right) - \frac{M_a}{P} + \frac{M_a + M_b + P(\Delta - u_p)}{P} \left(\frac{x}{h}\right) \quad (13)$$

با استفاده از شرایط مرزی، $u_{ep}(0) = 0$ و $u_{ep}(h) = \Delta - u_p$ ثابت‌های A و B بدست می‌آیند:

$$A = \frac{M_a}{P}; \quad B = -\frac{M_a \cos\varphi + M_b}{P \sin\varphi} \quad (14)$$

لذا:

$$u_{ep}(x) = \frac{M_a}{P} \cos\left(\varphi \frac{x}{h}\right) - \frac{M_a \cos\varphi + M_b}{P \sin\varphi} \sin\left(\varphi \frac{x}{h}\right) - \frac{M_a}{P} + \frac{M_a + M_b + P(\Delta - u_p)}{P} \left(\frac{x}{h}\right) \quad (15)$$

۳-۳- ترکیب اثر توام انحنا اولیه و ناشاغولی

حال با استفاده از اصل جمع آثار قوا معادلات (۱۵) و (۶) را جمع کرده و داریم:

$$u_e(x) = u_{ec} + u_{ep} = \frac{M_a}{P} \cos\left(\varphi \frac{x}{h}\right) - \frac{M_a \cos\varphi + M_b}{P \sin\varphi} \sin\left(\varphi \frac{x}{h}\right) - \frac{M_a}{P} + \frac{M_a + M_b + P(\Delta - u_p)}{P} \left(\frac{x}{h}\right) + \frac{\varphi^2}{\pi^2 - \varphi^2} a \sin\left(\frac{\pi x}{h}\right) \quad (16)$$

$$\frac{du_e}{dx} = \left[\frac{1}{\varphi} - \sin\left(\varphi \frac{x}{h}\right) - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \cos\left(\varphi \frac{x}{h}\right) \right] \frac{M_a h}{\varphi EI} + \left[\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\sin\varphi} \cos\left(\varphi \frac{x}{h}\right) \right] \frac{M_b h}{\varphi EI} + \frac{\Delta - u_p}{h} + \frac{\pi\varphi^2}{\pi^2 - \varphi^2} \times \frac{a}{h} \cos\left(\pi \frac{x}{h}\right) \quad (17)$$

از آنجا که:

$$\frac{du_a}{dx} = \psi + \gamma = \psi + \frac{Q}{GA_s} \quad (18)$$

که $\frac{du_e}{dx}$ دوران مقطع عرضی، ψ دوران ناشی از خمش γ دوران ناشی از برش و Q نیروی برشی در مقطع تغییر شکل یافته هستند.



حال که ψ_a و ψ_b یعنی دوران‌های ناشی از خمش تعیین شدند، در گام بعدی معادلات شیب افت بدست می‌آیند.

۳-۵- روش حل به کمک تئوری هارینگس

$$Q = P \left(\psi + \frac{du_p}{dx} + \frac{du_c}{dx} \right) - \frac{M_a + M_b + P\Delta}{h} \quad (27)$$

$$Q = P\psi + P \frac{u_p}{h} + P\pi \frac{a}{h} \cos\left(\pi \frac{x}{h}\right) - \frac{M_a + M_b + P\Delta}{h} \quad (28)$$

$$\psi \left(1 + \frac{P}{GA_s} \right) = \frac{du_e}{dx} - \frac{P}{GA_s} \times \left(\frac{\Delta - u_p}{h} - \pi \frac{a}{h} \cos\left(\pi \frac{x}{h}\right) + \frac{M_a + M_b}{Ph} \right) \quad (29)$$

از آنجا که $(\beta)_{Haringx} = 1/(1 + \frac{P}{GA_s})$ ، لذا دوباره به معادله (۲۳) می‌رسیم و ψ_a و ψ_b همان عبارات‌های (۲۵) و (۲۶) خواهند بود، به عبارت دیگر هردو روش به یک جواب منتج می‌شوند.

۳-۶- معادلات شیب افت پیشنهادی

از آنجا که $\psi_a = \theta_a - \frac{M_a + Pe_a}{k_a}$ و $\psi_b = \theta_b - \frac{M_b + Pe_b}{k_b}$ معادلات (۲۴) و (۲۵) را می‌توان به شکل ماتریسی زیر بیان نمود:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sin\varphi - \beta\varphi\cos\varphi}{\beta\varphi^2\sin\varphi} + \frac{EI}{hk_a} & \frac{\sin\varphi - \beta\varphi}{\beta\varphi^2\sin\varphi} \\ \frac{\sin\varphi - \beta\varphi}{\beta\varphi^2\sin\varphi} & \frac{\sin\varphi - \beta\varphi\cos\varphi}{\beta\varphi^2\sin\varphi} + \frac{EI}{hk_b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_a \\ M_b \end{bmatrix} = \quad (30)$$

$$\frac{EI}{h} \begin{bmatrix} \theta_a - \frac{\Delta - u_p}{h} - \frac{Pe_a}{k_a} - \beta \left[\frac{\pi\varphi^2}{\pi^2 - \varphi^2} \cdot \frac{a}{h} \right] + (1 - \beta) \left[\pi \frac{a}{h} \right] \\ \theta_b - \frac{\Delta - u_p}{h} + \frac{Pe_b}{k_b} + \beta \left[\frac{\pi\varphi^2}{\pi^2 - \varphi^2} \cdot \frac{a}{h} \right] - (1 - \beta) \left[\pi \frac{a}{h} \right] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_a \\ M_b \end{bmatrix} = \frac{EI}{h} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_a - \frac{\Delta - u_p}{h} - \frac{Pe_a}{k_a} - \beta \left[\frac{\pi\varphi^2}{\pi^2 - \varphi^2} \cdot \frac{a}{h} \right] + (1 - \beta) \left[\pi \frac{a}{h} \right] \\ \theta_b - \frac{\Delta - u_p}{h} + \frac{Pe_b}{k_b} + \beta \left[\frac{\pi\varphi^2}{\pi^2 - \varphi^2} \cdot \frac{a}{h} \right] - (1 - \beta) \left[\pi \frac{a}{h} \right] \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sin\varphi - \beta\varphi\cos\varphi}{\beta\varphi^2\sin\varphi} + \frac{EI}{hk_a} & \frac{\sin\varphi - \beta\varphi}{\beta\varphi^2\sin\varphi} \\ \frac{\sin\varphi - \beta\varphi}{\beta\varphi^2\sin\varphi} & \frac{\sin\varphi - \beta\varphi\cos\varphi}{\beta\varphi^2\sin\varphi} + \frac{EI}{hk_b} \end{bmatrix} \quad (32)$$

لذا معادلات شیب-افت برای تیرستون‌ها، با در نظر گرفتن اثرات مرکب نقص‌های اولیه، اتصالات نیمه صلب، بارهای محوری و جانبی و اثرات برشی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$M_a = \frac{EI}{h} A_{11} \left(\theta_a - \frac{\Delta - u_p}{h} - \frac{\varphi^2 e_a z_a}{4h(1 - z_a)} - \beta \left[\frac{\pi\varphi^2}{\pi^2 - \varphi^2} \cdot \frac{a}{h} \right] + (1 - \beta) \left[\pi \frac{a}{h} \right] \right) + \frac{EI}{h} A_{12} \left(\theta_b - \frac{\Delta - u_p}{h} + \frac{\varphi^2 e_b z_b}{4h(1 - z_b)} - \beta \left[\frac{\pi\varphi^2}{\pi^2 - \varphi^2} \cdot \frac{a}{h} \right] - (1 - \beta) \left[\pi \frac{a}{h} \right] \right) + FM_a \quad (33)$$

$$M_b = \frac{EI}{h} A_{21} \left(\theta_a - \frac{\Delta - u_p}{h} - \frac{\varphi^2 e_a z_a}{4h(1 - z_a)} - \beta \left[\frac{\pi\varphi^2}{\pi^2 - \varphi^2} \cdot \frac{a}{h} \right] + (1 - \beta) \left[\pi \frac{a}{h} \right] \right) + \frac{EI}{h} A_{22} \left(\theta_b - \frac{\Delta - u_p}{h} + \frac{\varphi^2 e_b z_b}{4h(1 - z_b)} - \beta \left[\frac{\pi\varphi^2}{\pi^2 - \varphi^2} \cdot \frac{a}{h} \right] - (1 - \beta) \left[\pi \frac{a}{h} \right] \right) + FM_b \quad (34)$$

z_a و z_b به ترتیب ضرایب توزیع در نقاط A و B هستند.

$$z_a = \frac{k_{col.}}{k_{col.} + k_a}; \quad z_b = \frac{k_{col.}}{k_{col.} + k_b} \quad (35)$$

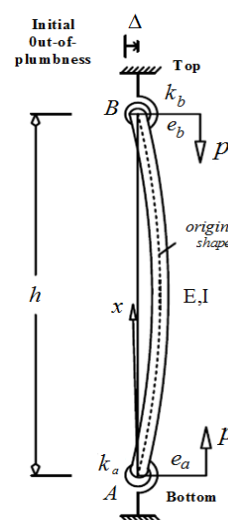
که $k_{col.} = \frac{4EI}{h}$ سختی خمشی ستون است. A_{11} ، A_{12} ، A_{21} و A_{22} ضرایب سختی ستون تیموشنکو هستند.

۴- صحت‌سنجی فرمول‌های پیشنهادی

برای صحت‌سنجی روابط پیشنهادی از شبیه‌سازی در نرم‌افزار اجزا محدود ABAQUS استفاده شده است. بدین منظور از سه مثال کاربردی استفاده شده است. در این مثال‌ها برای مدل کردن ستون و تیر از المان‌های خطی و برای اتصال نیمه صلب از



در این مثال هدف بدست آوردن لنگرهای انتهایی ستون می‌باشد.
داده‌های مسئله در شکل (۵) آمده است.



شکل ۵- ستون مثال یک

$$\begin{aligned} M_a + M_a \theta_a &= 0; & M_b + M_b \theta_b &= 0; \\ M_a + M_b + P\Delta &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_0 \\ \mathbf{M}_a + \mathbf{M}_b + \mathbf{P}\Delta_0 &= \mathbf{0} \rightarrow \\ \frac{EI}{h} \theta_a (A_{11} + A_{21}) + \frac{EI}{h} \theta_b (A_{12} + A_{22}) - \\ \frac{EI}{h^2} \left(\frac{\varphi^2 e_a z_a}{4h(1 - z_a)} \right) (A_{11} + A_{12}) + \\ \frac{EI}{h^2} \left(\frac{\varphi^2 e_b z_b}{4h(1 - z_b)} \right) (A_{12} + A_{22}) + \\ \frac{EI}{h^2} \beta \left[\frac{\pi \varphi^2}{\pi^2 - \varphi^2} \times a \right] (A_{22} - A_{11}) + \\ \frac{EI}{h^2} (1 - \beta) (\pi A) (A_{11} - A_{22}) + \mathbf{P}\Delta_0 &= 0 \end{aligned}$$

با محاسبه مقادیر A_{11} ، A_{21} و A_{22} و دیگر معلومات و قرار دادن در معادله بالا داریم:

(الف)

$$31303.874\theta_a + 31303.874\theta_b + 0.106 = 0 \rightarrow$$

$$(\theta_a + \theta_b) = -0.0000034 \text{ rad}$$

از طرفی با نوشتن معادلات شیب افت برای لنگر M_a داریم:

$$M_a = 20905.2\theta_a - 11.702$$

از سوی دیگر می‌دانیم که:

$$M_a = -k_a \theta_a = -43148 \theta_a = 11.702 \rightarrow$$

$$\theta_q = 1.827 \times 10^{-4} \rightarrow M_q = -7.88 \text{ kN.m}$$

با استفاده از معادله (الف) داریم:

$$\theta_b = -1.861 \times 10^{-4} \rightarrow M_b = -k_b \theta_b = +8.03 \text{ kN.m}$$

شکل (۶-الف) ستون مدل شده در نرم افزار را نشان می دهد.

خروج از مرکزیت بار مطابق با شکل (۶-ب) و نقص‌های اولیه در هندسه ستون اعمال شده است.

با انجام آنالیز استاتیکی در نرم افزار، لنگرهای انتهایی بدست آمده که، در جدول (۱) با نتایج تحلیل فرمولی مقایسه شده است.

جدول ۱- نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی و فرمول‌های

پیشنهادی-مدل ستون

خطا	نتایج عددی	نتایج تحلیلی	لنگر
(%)	(kN.m)	(kN.m)	
۵	-۷/۴۶	-۷/۸۸	M_a
۵	+۷/۶۳	+۸/۰۳	M_b



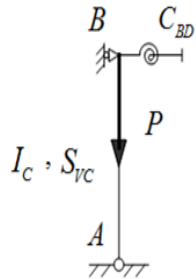
با استفاده از روابط شیب-افت ارائه شده برای M_a داریم:

$$M_a = 75.246 \text{ kN.m}$$

لذا تیر با دو انتهای صلب را با یک فنر چرخشی معادل جایگزین می‌شود (شکل ۸).

$$C_a = \frac{M_a}{\theta_a} = \frac{75.246}{0.184} = 408.96 \text{ kN.m} \rightarrow$$

$$C_{Total} = 408.95 + 150 = 558.95 \text{ kN.m}$$



شکل ۸- ستون جایگزین قاب

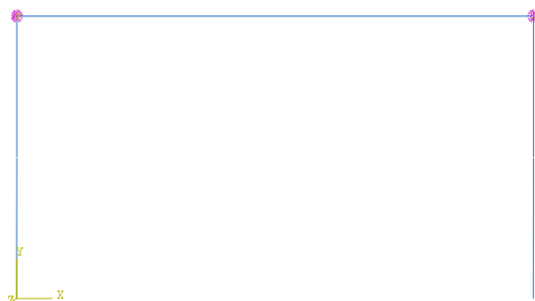
با استفاده از معادله کمناشی برای قاب مهار شده داریم:

$$32(Z_a - 1)(Z_b - 1) - 4\cos\varphi \times [8(Z_a - 1)(Z_b - 1) + (Z_b + Z_a - 2Z_bZ_a)\varphi^2\beta] + \sin\varphi \times [-16\beta\varphi + (Z_a + Z_b)(4\varphi + 16\beta\varphi) + Z_aZ_b(\beta\varphi^3 - 8\varphi - 16\beta\varphi)] = 0$$

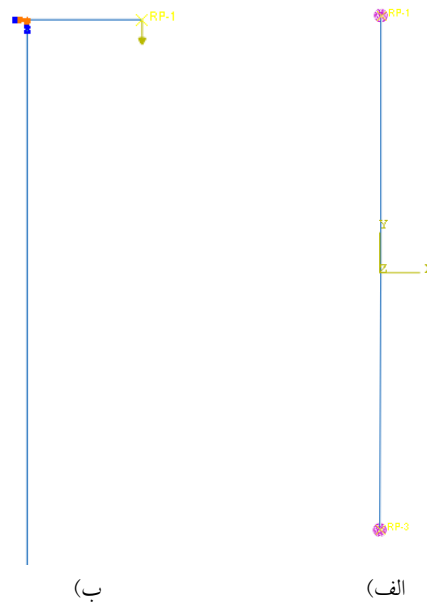
$$Z_b = \frac{36279.6}{36279.6 + 558.95} = 0.985 \text{ و } Z_a = 1, \text{ (شکل ۷) در مدل}$$

و از حل معادله فوق به $9249/92 \text{ kN}$ می‌رسیم.

شکل (۹) قاب شبیه‌سازی شده در ABAQUS را نشان می‌دهد. اعمال ناشاغولی و خروج از مرکزیت مشابه مثال قبل اعمال شده است. شکل (۱۰) حالت کمناشی یافته قاب را نشان می‌دهد که مقدار بار بحرانی نشان داده شده بسیار نزدیک به حالت تنوری می‌باشد. در نهایت مقایسه نتایج و مقادیر خطا در جدول (۲) نشان داده شده است.



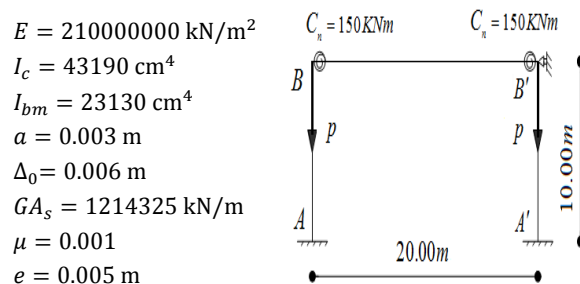
شکل ۹- مدل‌سازی قاب در نرم‌افزار



شکل ۶- شبیه‌سازی ستون مثال اول

مثال ۲

قاب و مشخصات نشان داده شده آن را در شکل (۷) در نظر بگیرید.



شکل ۷- قاب مهار جانبی شده مثال دو

با در نظر گرفتن تیر BB' که عضو با دو انتهای نیمه صلب است، با نوشتن معادله تعادل برای این عضو داریم:

$$(\theta_a = \theta_b: \text{فرض})$$

$$M_a + M_b + P\Delta = 0 \rightarrow \theta_a = \frac{-P\Delta_0 h}{2EI(A_{11} + A_{12})}$$

با استفاده از فرمول‌های ارائه شده داریم:

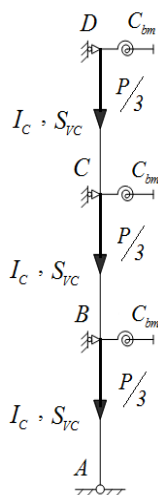
$$A_{11} = A_{22} = 0.0605, \quad A_{12} = A_{21} = 0.00061,$$

$$z_a = z_b = 0.9848$$

با در نظر گرفتن $P = 8980.67 \text{ kN}$ داریم:

$$\beta = 1 - \frac{P}{GA_s} = 0.926$$

$$\rightarrow \varphi^2 = \frac{Ph^2}{\beta EI} = 79.866 \rightarrow \varphi = 8.935$$



شکل ۱۲- مدل جایگزین قاب

لذا با استفاده از معادل تعادل در تیرها داریم:

$$C_{beam} = \frac{E_{beam} I_{beam}}{L_{beam}} (A_{11}(beam) - A_{12}(beam))$$

لذا با استفاده از رابطه ذکر شده برای A_{11} ، A_{12} و A_{22}

داریم:

$$Z_a = \frac{K_{beam}}{K_{beam} + K_a} = \frac{9714.6}{9714.6 + 150} = 0.985 = Z_b$$

$$\beta = 1 - \frac{P}{GA_s} = 0.99$$

$$\varphi^2 = \frac{Ph^2}{\beta EI} = 93.48 \rightarrow \varphi = 9.669$$

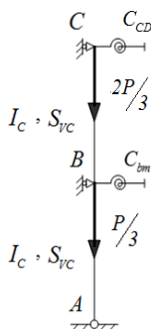
و در نهایت برای مقادیر A_{11} ، A_{12} و A_{22} داریم:

$$A_{11} = 0.063, A_{12} = -0.00171, A_{22} = 0.063$$

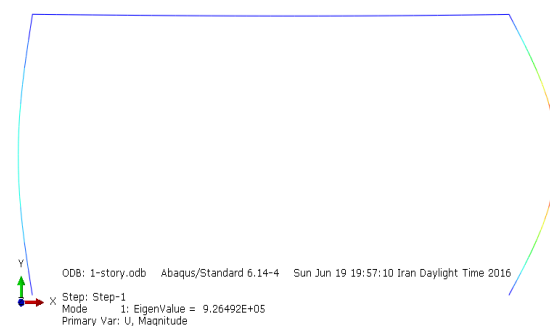
$$C_{beam} = 2428.65(0.063 + 0.00171) = 157.16 \text{ kN.m}$$

مدل معادل دوم با جایگذاری ستون CD با فنر دارای سختی

دورانی معادل (شکل ۱۳)) بدست می‌آید:



شکل ۱۳- مدل معادل دوم



شکل ۱۰- کماتش الاستیک قاب در نرم‌افزار

جدول ۲- نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی و فرمولهای پیشنهادی-

مدل ستون

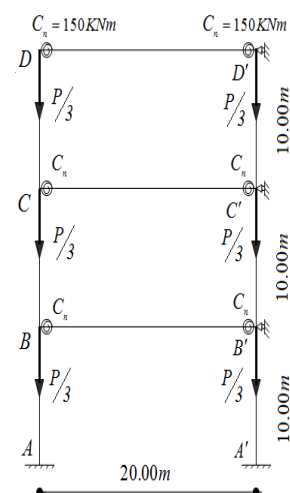
خطا	نتایج عددی	نتایج تحلیلی	بار بحرانی
(%)	(kN.m)	(kN.m)	
۱	۹۲۶۴/۹۲	۹۲۴۹/۹۲	P_{cr}

مثال ۳

قاب و مشخصات نشان داده شده آن را در شکل (۱۱) در نظر بگیرید.

u_c مقدار خمیدگی در وسط ستون‌ها است و مقدار ناشاغولی در بالای ستون u_p فرض می‌شود. هدف بدست آوردن بار بحرانی P_{cr} است.

با جایگذاری تیرها با فنرهای چرخشی معادل مطابق شکل (۱۲) داریم:



شکل ۱۱- قاب مهار جانبی شده مثال سه

$$E = 210000000 \text{ kN/m}^2$$

$$I_c = 43190 \text{ cm}^4$$

$$I_{bm} = 23130 \text{ cm}^4$$

$$u_c = 0.003 \text{ m}$$

$$u_p = 0.006 \text{ m}$$

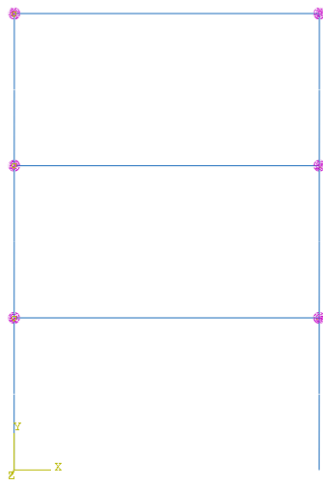
$$GA_s = 1214325 \text{ kN/m}^2$$

$$A_{column} = 180.6 \text{ cm}^2$$

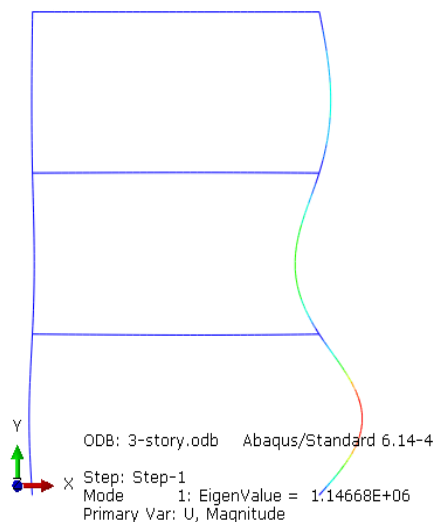
$$A_{beam} = 84.5 \text{ cm}^2$$

$$e = 0.005 \text{ m}$$

نشان می‌دهد که همانطور در بخش روش شبیه‌سازی شرح داده شد بار بحرانی آن با توجه به مقادیر اندک خروج از مرکزیت و ناشاغولی، بسیار نزدیک به مد اول می‌باشد.



شکل ۱۵- مدل‌سازی قاب در نرم‌افزار



شکل ۱۶- کمناش الاستیک قاب در نرم‌افزار (مد اول)

جدول ۳- نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی و فرمولهای پیشنهادی-

مدل ستون

خطا	نتایج عددی (kN.m)	نتایج تحلیلی (kN.m)	بار بحرانی
(%)			
۱	۱۱۴۶۶/۸۰	۱۱۵۷۴/۸۸	P_{cr}

۵- نتیجه گیری

در این تحقیق، ابتدا به روش‌های در نظر گرفتن مولفه برشی نیروی محوری در پایداری ستون‌ها، شامل دو روش انگسر و

$$C_{CD} = \frac{E_{CD} I_{CD}}{L_{CD}} A_{11(CD)}$$

$$\beta_{CD} = 1 - \frac{3745.92}{1214325} = 0.9969$$

$$\varphi = 2.035$$

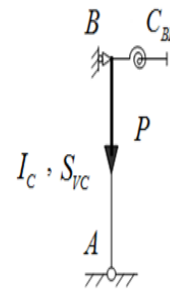
$$K_{CD} = \frac{4EI}{L} = 36279.6$$

$$Z_a = Z_b = 0.996$$

$$A_{11} = 0.016 \rightarrow C_{CD} = 145.12 \text{ kN.m}$$

$$C_{Total} = 145.12 + 157.16 = 302.28 \text{ kN.m}$$

مدل معادل سوم به شکل (۱۴) است:



شکل ۱۴- مدل معادل سوم

$$C_{BC} = \frac{E_{BC} I_{BC}}{L_{BC}} A_{11}$$

$$\beta = 0.9938$$

$$\varphi = 2.883$$

$$A_{11} = 0.001 \rightarrow C_{BC} = 9.1$$

$$C_{Total} = 166.26 \text{ kN.m}$$

با استفاده از معادله کمناشی برای قاب مهار شده داریم:

$$32(Z_a - 1)(Z_b - 1) - 4\cos\varphi \times [8(Z_a - 1)(Z_b - 1) + (Z_b + Z_a - 2Z_b Z_a)\varphi^2\beta] + \sin\varphi \times [-16\beta\varphi + (Z_a + Z_b) \cdot (4\varphi + 16\beta\varphi) + Z_a Z_b (\beta\varphi^3 - 8\varphi - 16\beta\varphi)] = 0$$

در مدل شکل (۱۴):

$$Z_b = \frac{36279.6}{36279.6 + 166.26} = 0.966, \quad Z_a = 1$$

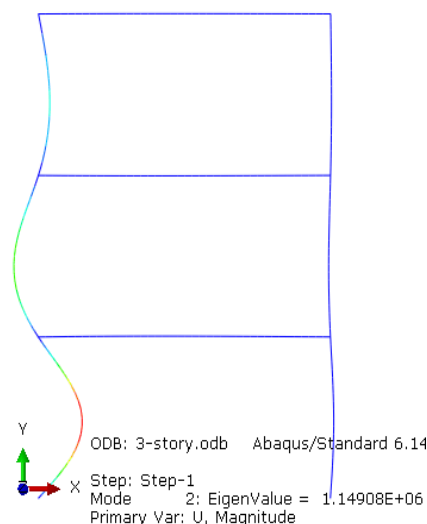
و در نهایت به $P_{cr} = 11574.88 \text{ kN}$ می‌رسیم. شکل (۱۵)

مدل قاب را در محیط نرم‌افزار نشان می‌دهد.

با توجه به مطالب ذکر شده در قسمت شبیه‌سازی، نتایج به صورت نشان داده شده در شکل (۱۶) می‌باشد.

مقایسه نتایج و مقادیر خطا در جدول (۳) نشان داده شده است. مقایسه نتایج دقت بالای روابط پیشنهادی را نشان می‌دهد. همانطور که در شکل (۱۶) نشان داده شده است، مد کمناشی قاب به صورت نامتقارن رخ داده است که دلیل آن در قسمت شبیه‌سازی توضیح داده شد. در شکل (۱۷) مد دوم کمناش را

- [1] Wilson, W.M. and Maney, G.A. (1915), "Slope-Deflection Method", University of Illinois Engineering Experiment Station, Bulletin 80.
- [2] Norris C.H. and Wilbur J.B. (1960), "Elementary Structural Analysis", 2nd Ed., McGraw- Hill Book Co.
- [3] Georgios, E.M. and Charis, J.G. (2006), "Buckling Strength of Multi-Story Sway, Non-Sway and Partially-Sway Frames with Semi-Rigid Connections", Journal of Constructional Steel Research, Vol. 62, No. 9, pp. 893-905.
- [4] Chiorean, C.G. and Marchis, I.V. (2017), "A Second-Order Flexibility-Based Model for Steel Frames of Tapered Members", Journal of Constructional Steel Research, Vol. 132, pp. 43-71.
- [5] Aristizabal-Ochoa, J.D. (2008), "Slope-Deflection Equations for Stability and Second-Order Analysis of Timoshenko Beam-Column Structures with Semi-Rigid Connections", Engineering Structures, Vol. 30, No. 11, pp. 2517-2527.
- [6] Aristizabal-Ochoa, J.D. (2010), "Second Order Slope Deflection Equations for Imperfect Beam-Column Structures with Semi-Rigid Connections", Engineering Structures, Vol. 32, No. 8, pp. 2440-2454.
- [7] Konstantinos, E.K. and Charis, J.G. (2012), "Elastic Buckling Load of Multi-Story Frames Consisting of Timoshenko Members", Journal of Constructional Steel Research, Vol. 71, pp. 231-244.
- [8] Aristizabal-Ochoa, J.D. (2015), "Stability of Imperfect Columns with Nonlinear Connections under Eccentric Axial Loads Including Shear Effects", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 90, pp. 61-76.
- [9] Mario, M.A. (2012), "Dynamic Stability of Shear-Flexible Beck's Columns Based on Engesser's and Haringx's Buckling Theories", Computers and Structures, Vol. 86, No. 21-22, pp. 2042-2055.
- [10] Aristizabal-Ochoa, J.D. (2013), "Stability of Imperfect Slender Columns with Non-Linear Connections", International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 54, pp. 66-75.



شکل ۱۷- کماتش الاستیک قاب در نرم افزار (مد دوم)

هارینگس اشاره شده است. سپس پایداری ستون‌های با اتصالات نیمه صلب دارای نقص اولیه که شامل ناشاغولی، خروج از مرکزیت بارها و انحنای داخلی ستون هستند، با لحاظ کردن اثرات برشی به دو روش هارینگس و انگسر مورد بررسی قرار گرفته و معادلات شیب-افت جدیدی برای این ستون‌ها ارائه داده شده است. این معادلات قادر به پیش‌بینی بار کماتشی قاب‌ها، ستون‌ها، و هم چنین لنگرهای ایجاد شده در اتصالات نیمه صلب می‌باشد که نسبت به روابط گذشته از دقت بالاتری برخوردار است. در نهایت صحت روابط حاصله، با شبیه‌سازی مثال‌های مختلف در نرم افزار آباکوس، اعتبار سنجی شد که مقایسه نتایج بدست آمده، روابط تئوری بدست آمده را تایید می‌کند.