

# تحلیل احتمالاتی پایداری قاب‌های فولادی ساده

## و دروازه‌ای با پیوندها و تکیه‌گاه‌های نرم

محمد رضایی پزند<sup>۱</sup>، فرزاد شهابیان<sup>۲</sup>، محسن بمبائی‌چی<sup>۳</sup>

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۶/۱۲، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۱۲/۱۵)

### چکیده

در تحلیل و طراحی قاب‌های فولادی، عامل‌های گوناگونی وجود دارند که عدم قطعیت هر یک از آنها می‌تواند اثر قابل توجهی در ایمنی سازه داشته باشد. در این میان، سختی پیوندهای تکیه‌گاهی، سختی پیوندهای تیر به ستون و سختی تکیه‌گاه جانبی یا مهاربند، به سبب عدم قطعیت‌هایی مانند چگونگی ساخت، اجرا، نصب و الگوسازی اعضا و پیوندهای سازه‌های فولادی، می‌توانند به عنوان نمونه‌هایی از این متغیرها پنداشته شوند. در این مقاله، نخست، بر پایه‌ی حل دقیق معادله‌ی دیفرانسیل تیر اولر-برنولی، ماتریس پایداری قاب‌های فولادی ساده و دروازه‌ای با عضوهای منشوری و نامنشوری و پیوندها و تکیه‌گاه‌های نرم در دسترس قرار می‌گیرد. باید افزود، نرمی پیوندها با فنرهای دورانی و انتقالی خطی الگوسازی می‌شوند. سپس، با حل چند نمونه عددی، درستی و دقت روش پیشنهادی در تحلیل پایداری یقین‌اندیشانه واری می‌گردد. در ادامه، از روش شبیه‌سازی مونت کارلو برای برآورد احتمال شکست در پایداری این گونه قاب‌ها بهره‌جویی خواهد شد. در این میان، سختی دورانی پیوندهای تیر به ستون، سختی دورانی پیوندهای ستون به تکیه‌گاه و سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی، به عنوان متغیرهای تصادفی اختیار می‌شوند. بر این پایه، صدهزار مرتبه از رابطه‌سازی پیشنهادی برای یافتن بار کم‌انرژی قاب‌های شبیه‌سازی شده، بهره‌جویی می‌گردد و اثر تغییرهای ضریب پراکندگی و گونه‌ی تابع توزیع احتمال متغیرهای تصادفی در مقاومت کم‌انرژی سازه‌های یاد شده مورد ارزیابی می‌گیرد. افزون بر این‌ها، حساسیت احتمال شکست در پایداری قاب‌های فولادی ساده و دروازه‌ای، نسبت به عدم قطعیت در سختی پیوندها و تکیه‌گاه‌ها بررسی می‌شود.

### کلمات کلیدی

تحلیل احتمالاتی، پایداری، قاب‌های فولادی، پیوند نرم، تکیه‌گاه نرم، عضوهای نامنشوری، مونت کارلو، حساسیت.

## Probabilistic Stability Analysis of Portal and Gabled Steel Frames with Flexible Connections and Supports

M. Rezaiee-Pajand, F. Shahabian, M. Bambaeechee

### ABSTRACT

There are various factors in the analysis and design of the steel frames that uncertainties in any one of them can have a significant effect on the structural safety. The rotational stiffness of the bases and beam-to-column connections and also, the transitional stiffness of the bracing system can be considered as examples of these variables. In this paper, firstly, based on the exact solution of the governing differential equation for an Euler-Bernoulli beam, the stability matrix of portal and gabled steel frames with flexible connections and supports and non-prismatic members are derived. It should be added, the flexibility of connections and supports are modeled by the linear rotational or transitional springs. The accuracy of the proposed approach in the deterministic stability analysis with numerical examples verified. Then, by using of the Monte-Carlo simulation method, the probability of failure of mentioned frames for the stability is estimated. The rotational stiffness of the beam-to-column connections and bases and also, the transitional stiffness of lateral support are considered as the random variables in the stochastic stability analysis. Accordingly, by using of the presented formulation the buckling loads of the simulated frames for the hundred thousand times obtained and the effects of various coefficients of variations and different probabilistic distribution functions for random variables in the buckling resistance of the foregoing frames estimated. Moreover, the sensitivity of the probability of failure for the stability of frames with respect to uncertainty of the stiffness of the connections and supports investigated.

### KEYWORDS

Probabilistic analysis, Stability, Steel frames, Flexible connection, Flexible support, Non-prismatic member, Monte-Carlo, sensitivity

۱- استاد گروه عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، mrpajand@yahoo.com

۲- استاد گروه عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، shahabf@um.ac.ir (نویسنده مسئول)

۳- دانشجوی دکتری عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، mohsen\_bambaeechee@yahoo.com

در تحلیل و طراحی قاب‌های فولادی، متغیرهای گوناگونی، مانند کیفیت و چگونگی ساخت، اجرا و نصب عضوها، بارهای وارده، ظرفیت عضوها و مشخصه‌های مواد، وجود دارند که عدم قطعیت هر یک از آنها می‌تواند اثر قابل‌توجهی در ایمنی سازه داشته باشد. برای وارد نمودن هر یک از این عدم قطعیت‌ها نیاز به یک تحلیل احتمالاتی است [۱ و ۲]. در این میان، سختی پیوندهای تیر به ستون، سختی پیوندهای ستون به تکیه‌گاه و سختی تکیه‌گاه جانبی، می‌توانند به عنوان نمونه‌هایی از این متغیرها در نظر گرفته شوند. در دو دهه‌ی اخیر، بررسی‌ها و تحقیق‌هایی گوناگونی در این زمینه و به طور کلی، درباره‌ی قاب‌های فولادی، انجام پذیرفته است. از آن میان، Gao و Haldar به بررسی برآورد ایمنی سازه‌های قابی با پیوندهای نرم (نیمه‌سخت) پرداختند [۳]. عدم قطعیت مشخصه‌های مواد در پایداری سازه‌ها به وسیله‌ی Zhang و Ellingwood، مورد ارزیابی قرار گرفت [۴]. Song و Ellingwood، الگویی برای برآورد قابلیت اطمینان قاب‌های فولادی خمشی با پیوندهای جوشی ارائه نمودند. آنها احتمال شکست و قابلیت اطمینان لرزه‌ای این گونه قاب‌ها را نیز مورد بررسی قرار دادند [۵ و ۶]. Sakurai و همکارانش به تحلیل اجزای محدود احتمال اندیشانه‌ی<sup>۱</sup> قاب‌های فولادی با پیوندهای نرم پرداختند. آنها با تصادفی پنداشتن سختی نخستین پیوند، احتمال شکست شش سیستم قابی را بر اساس سه معیار ظرفیت لنگر خمشی کشسان، بیشینه‌ی جابجایی افقی و بیشینه‌ی نسبت تغییرمکان طبقه برآورد نمودند [۷]. راهکار نونین برای تحلیل قابلیت اعتماد لرزه‌ای قاب‌های با پیوندهای نرم، به وسیله‌ی Huh و Haldar پیشنهاد گردید [۸]. Razani و Hadianfard، رفتار نرمی پیوندها را در تحلیل قابلیت اطمینان قاب‌های فولادی وارد کردند. آنها مقاومت عضوها و بارگذاری را به عنوان متغیرهای تصادفی در نظر گرفتند. سپس، با بهره‌گیری از روش شبیه‌سازی مونت کارلو<sup>۲</sup>، احتمال گسیختگی

قاب‌های فولادی با پیوندهای نیمه‌سخت را بررسی نمودند [۹]. Duan و همکارانش، با بهره‌جویی از راهکار شبیه‌سازی مونت کارلو، به بررسی اثر نقص نخستین، بر قابلیت اعتماد قاب‌های فولادی ساده با پیوندهای نرم پیچی پرداختند [۱۰]. طراحی قاب‌های فولادی با عضوهای نامنشوری، بر پایه‌ی قابلیت اطمینان و برآورد احتمال شکست سازه، به وسیله‌ی Li و Li ارائه گردید [۱۱]. باید افزود، در زمینه‌ی تحلیل‌های احتمالاتی قاب‌های فولادی با عضوهای نامنشوری، پژوهش‌های کمی در دسترس می‌باشد [۱۱]. لطف‌اللهی یقین و نگین به بررسی اثر انحنای اولیه‌ی تصادفی عضوها بر قابلیت اعتماد قاب‌های فولادی پرداختند [۱۲]. آنها با بهره‌گیری از روش شبیه‌سازی مونت کارلو، احتمال شکست این گونه قاب‌ها را به دست آوردند. قابلیت اعتماد پایداری قاب‌های فولادی با پیوندهای نیمه‌سخت و دارای مشخصه‌های غیرقطعی به وسیله‌ی Rezaiee-Pajand و همکارانش مورد بررسی قرار گرفت [۱۳]. این پژوهشگران با به کارگیری فن مونت کارلو، به تحلیل احتمالاتی قاب‌های فولادی با شمار طبقه‌ها و دهانه‌های متفاوت پرداختند. Kala، تحلیل حساسیت پایداری قاب‌های فولادی ساده را واکاوی نمود [۱۴]. Shayanfar و همکارانش با به کارگیری تحلیل احتمال اندیشانه به ارزیابی قابلیت اعتماد اعضای طراحی شده بر اساس آیین‌نامه‌ی فولاد ایران پرداختند و شاخص قابلیت اعتماد را برای نسبت‌های متفاوت بار مرده به زنده، ارائه کردند [۱۵]. تحلیل حساسیت خرابی پیشرونده قاب‌های خمشی فولادی با بهره‌جویی از راهکارهای گوناگون شبیه‌سازی و تصادفی پنداشتن بارها و مشخصه‌های عضوها به وسیله‌ی Naji و Irani انجام پذیرفت [۱۶]. Jalali و همکارانش به تحلیل احتمالاتی لرزه‌ای قاب‌های فولادی خمشی با پیوندهای پرداختند [۱۷]. تحلیل احتمال اندیشانه‌ی لرزه‌ای ناخطی قاب‌های فولادی ساده، به وسیله‌ی Shahabian و Alamatian صورت گرفت [۱۸]. آنها با بهره‌گیری از راهکار مونت کارلو، حساسیت پاسخ بیشینه‌ی سازه به متغیرهای تصادفی هندسه و مشخصه‌های عضوها و احتمال خرابی قاب

<sup>1</sup> Stochastic finite element analysis

<sup>2</sup> Monte-Carlo simulation method



فولادی ساده را برای حالت‌های گوناگون در دسترس قرار دادند. De León و همکارانش به تحلیل احتمالاتی لرزه‌ای ساختمان‌های فولادی با پیوندهای پیچی و جوشی پرداختند [۱۹]. تحلیل ایمنی مقاومت موضعی تیورق‌های I-شکل، برای الگوهای متفاوت و بهره‌جویی از فن مونت کارلو به وسیله‌ی Shahabian و همکارانش مورد ارزیابی قرار گرفت [۲۰]. در یکی از جدیدترین پژوهش‌ها، Razavi و Abolmaali به ارزیابی مقاومت لرزه‌ای قاب‌های فولادی با پیوندهای سخت و نیمه‌سخت در فضای عدم قطعیت پرداخته‌اند [۲۱].

در این مقاله، نخست، بر پایه‌ی حل دقیق معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر تغییرشکل عضوهای قاب و با توجه به نگره‌ی تیر اولر-برنولی، بار کمانشی (بار بحرانی) دقیق قاب‌های فولادی ساده و دروازه‌ای با پیوندها و تکیه‌گاه‌های نرم و عضوهای منشوری و نامنشوری به دست می‌آید. در ادامه، از روش شبیه‌سازی مونت کارلو برای برآورد احتمال شکست در پایداری این گونه قاب‌ها بهره‌جویی می‌گردد. در این میان، سختی دورانی پیوندهای تیر به ستون، سختی دورانی پیوندهای ستون به تکیه‌گاه و سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی، به عنوان متغیرهای تصادفی اختیار می‌شوند. باید افزود، برای هر یک از متغیرهای تصادفی، توزیع‌های نرمال و لگ-نرمال، با ضریب پراکندگی‌های ۵ تا ۲۵ درصد در نظر گرفته می‌شود. در پایان، با رسم برخی از نمودارهای کاربردی، مانند نمودار احتمال شکست سازه در برابر ضریب پراکندگی‌های متغیرهای تصادفی و نمودارهای تابع چگالی احتمال (PDF) و تابع توزیع تجمعی (CDF) پاسخ‌ها، به بررسی احتمال شکست در پایداری قاب‌های یاد شده بر حسب گونه‌ی توزیع و ضریب پراکندگی متغیرهای تصادفی پرداخته می‌شود.

## ۲- تحلیل پایداری قاب‌ها با پیوندها و تکیه‌گاه‌های نرم

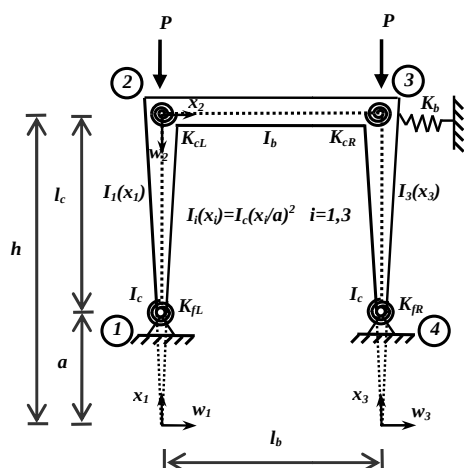
قاب‌های فولادی ساده و دروازه‌ای با پیوندهای نرم و تکیه‌گاه‌های کشسان دورانی و انتقالی، زیر اثر بارهای متمرکز  $P$  در شکل (۱) نشان داده شده است. این قاب‌ها دارای عضوهای منشوری و نامنشوری می‌باشند. سختی دورانی پیوندهای ستون‌ها به تکیه‌گاه، تیر به ستون‌ها و سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی قاب که با فنرهای خطی الگو سازی شده‌اند، به ترتیب، برابر مقدارهای  $K_c$ ،  $K_f$  و  $K_b$  پنداشته شده‌اند. پانویس‌های  $R$  و  $L$ ، به ترتیب، نشانگر پیوندهای راست و چپ می‌باشند. ضریب کشسانی عضوها برابر  $E$  است. محور  $x$ ، محور طولی عضو و محور  $w$ ، راستای تغییرشکل عضو را نشان می‌دهند. ستون‌های قاب‌ها، دارای ارتفاع یکسان،  $l_c$ ، و لنگر لختی همانند،  $I_c$ ، برای عضوهای منشوری و  $I_l(x_l)$  برای عضوهای نامنشوری می‌باشند. طول و لنگر لختی تیرها برای عضوهای منشوری و نامنشوری، به ترتیب، با  $I_b$ ،  $I_l$ ،  $I_j(x_j)$  نمایش داده می‌شوند. شکل (۲)، مقطع عضوهای منشوری و نامنشوری I-شکل و چگونگی تغییر آن در طول عضو را نشان می‌دهد.

بر پایه‌ی شکل (۲)، آشکار است که لنگر لختی عضوهای منشوری ثابت و لنگر لختی تیرها و ستون‌های نامنشوری با چشم‌پوشی از جان مقطع، از رابطه‌ی (۱) به دست می‌آید.

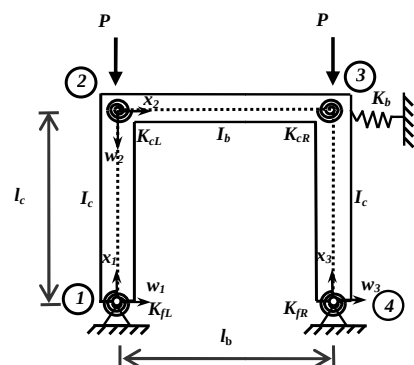
$$\begin{cases} I_l(x_l) = I_c \left( \frac{x_l}{a} \right)^2 \\ I_j(x_j) = I_b \left( \frac{x_j}{b} \right)^2 \end{cases} \quad (1)$$

بر پایه‌ی نگره‌ی تیر اولر-برنولی، معادله‌های دیفرانسیل حاکم بر ستون‌ها و تیرهای قاب‌های ساده و دروازه‌ای شکل (۱)، به ترتیب، به قرار رابطه‌های (۲) و (۳) خواهند بود. پاسخ‌های این معادله‌ها برای قاب‌های شماره‌ی ۱ تا ۴ از شکل (۱)، به ترتیب، به صورت رابطه‌های (۴) تا (۷) بیان می‌شوند.

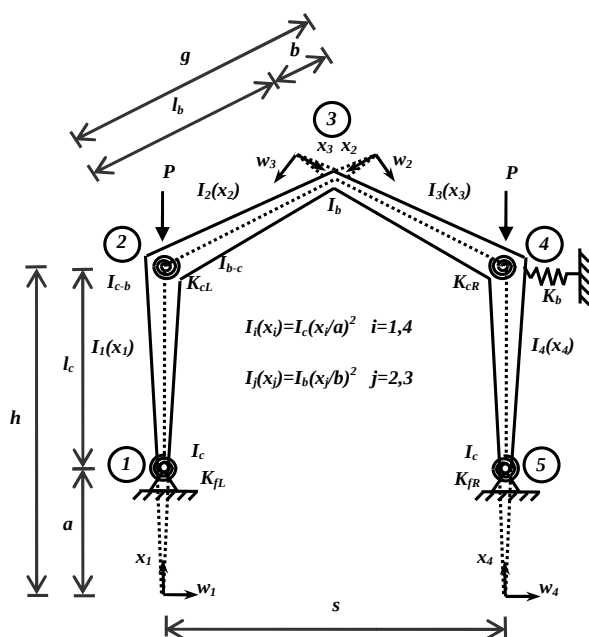




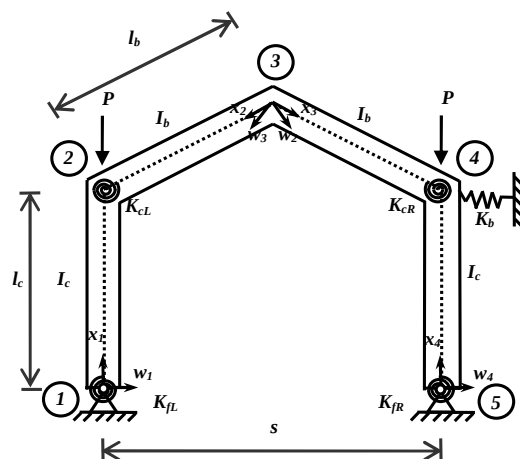
ب- قاب ساده‌ی نامشوری



الف- قاب ساده‌ی منشوری

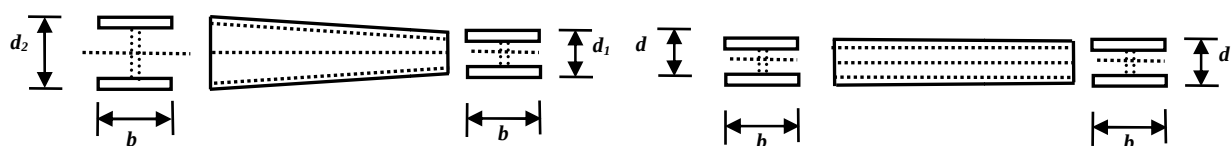


د- قاب دروازه‌ای نامشوری



ج- قاب دروازه‌ای منشوری

شکل (۱): قاب‌های فولادی ساده و دروازه‌ای با پیوندهای تکیه‌گاه‌های نرم



ب- پهنای بال ثابت و بلندای جان متغیر (نامشوری)

الف- پهنای بال و بلندای جان ثابتند (منشوری)

شکل (۲): شکل و تغییرهای مقطع برای عضوهای I-شکل منشوری و نامشوری

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dx_1^2} \left( EI_c \frac{d^2 w_1}{dx_1^2} \right) + P \frac{d^2 w_1}{dx_1^2} = 0 \\ \frac{d^2}{dx_2^2} \left( EI_b \frac{d^2 w_2}{dx_2^2} \right) = 0 \\ \frac{d^2}{dx_3^2} \left( EI_c \frac{d^2 w_3}{dx_3^2} \right) + P \frac{d^2 w_3}{dx_3^2} = 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dx_1^2} \left[ EI_c \left( \frac{x_1}{a} \right)^2 \frac{d^2 w_1}{dx_1^2} \right] + P \frac{d^2 w_1}{dx_1^2} = 0 \\ \frac{d^2}{dx_2^2} \left( EI_b \frac{d^2 w_2}{dx_2^2} \right) = 0 \\ \frac{d^2}{dx_3^2} \left[ EI_c \left( \frac{x_3}{a} \right)^2 \frac{d^2 w_3}{dx_3^2} \right] + P \frac{d^2 w_3}{dx_3^2} = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dx_1^2} \left( EI_c \frac{d^2 w_1}{dx_1^2} \right) + P \frac{d^2 w_1}{dx_1^2} = 0 \\ \frac{d^2}{dx_2^2} \left( EI_b \frac{d^2 w_2}{dx_2^2} \right) = 0 \\ \frac{d^2}{dx_3^2} \left( EI_b \frac{d^2 w_3}{dx_3^2} \right) = 0 \\ \frac{d^2}{dx_4^2} \left( EI_c \frac{d^2 w_4}{dx_4^2} \right) + P \frac{d^2 w_4}{dx_4^2} = 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dx_1^2} \left[ EI_c \left( \frac{x_1}{a} \right)^2 \frac{d^2 w_1}{dx_1^2} \right] + P \frac{d^2 w_1}{dx_1^2} = 0 \\ \frac{d^2}{dx_2^2} \left[ EI_b \left( \frac{x_2}{b} \right)^2 \frac{d^2 w_2}{dx_2^2} \right] = 0 \\ \frac{d^2}{dx_3^2} \left[ EI_b \left( \frac{x_3}{b} \right)^2 \frac{d^2 w_3}{dx_3^2} \right] = 0 \\ \frac{d^2}{dx_4^2} \left[ EI_c \left( \frac{x_4}{a} \right)^2 \frac{d^2 w_4}{dx_4^2} \right] + P \frac{d^2 w_4}{dx_4^2} = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1 = A_1 \sin \rho x_1 + B_1 \cos \rho x_1 + C_1 x_1 + D_1 \\ w_2 = A_2 x_2^3 + B_2 x_2^2 + C_2 x_2 + D_2 \\ w_3 = A_3 \sin \rho x_3 + B_3 \cos \rho x_3 + C_3 x_3 + D_3 \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1 = \sqrt{\frac{x_1}{a}} \left\{ A_1 \sin \left[ \sqrt{\left( \frac{\bar{a}\rho}{1-a} \right)^2 - \frac{1}{4}} \ln \left( \frac{x_1}{a} \right) \right] + B_1 \cos \left[ \sqrt{\left( \frac{\bar{a}\rho}{1-a} \right)^2 - \frac{1}{4}} \ln \left( \frac{x_1}{a} \right) \right] \right\} + C_1 x_1 + D_1 \\ w_2 = A_2 x_2^3 + B_2 x_2^2 + C_2 x_2 + D_2 \\ w_3 = \sqrt{\frac{x_3}{a}} \left\{ A_3 \sin \left[ \sqrt{\left( \frac{\bar{a}\rho}{1-a} \right)^2 - \frac{1}{4}} \ln \left( \frac{x_3}{a} \right) \right] + B_3 \cos \left[ \sqrt{\left( \frac{\bar{a}\rho}{1-a} \right)^2 - \frac{1}{4}} \ln \left( \frac{x_3}{a} \right) \right] \right\} + C_3 x_3 + D_3 \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1 = A_1 \sin \rho x_1 + B_1 \cos \rho x_1 + C_1 x_1 + D_1 \\ w_2 = A_2 x_2^3 + B_2 x_2^2 + C_2 x_2 + D_2 \\ w_3 = A_3 x_3^3 + B_3 x_3^2 + C_3 x_3 + D_3 \\ w_4 = A_4 \sin \rho x_4 + B_4 \cos \rho x_4 + C_4 x_4 + D_4 \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1 = \sqrt{\frac{x_1}{a}} \left\{ A_1 \sin \left[ \sqrt{\left( \frac{\bar{a}\rho}{1-a} \right)^2 - \frac{1}{4}} \ln \left( \frac{x_1}{a} \right) \right] + B_1 \cos \left[ \sqrt{\left( \frac{\bar{a}\rho}{1-a} \right)^2 - \frac{1}{4}} \ln \left( \frac{x_1}{a} \right) \right] \right\} + C_1 x_1 + D_1 \\ w_2 = A_2 x_2 + B_2 x_2 \ln \left( \frac{x_2}{h} \right) + C_2 + D_2 \ln \left( \frac{x_2}{h} \right) \\ w_3 = A_3 x_3 + B_3 x_3 \ln \left( \frac{x_3}{h} \right) + C_3 + D_3 \ln \left( \frac{x_3}{h} \right) \\ w_4 = \sqrt{\frac{x_4}{a}} \left\{ A_4 \sin \left[ \sqrt{\left( \frac{\bar{a}\rho}{1-a} \right)^2 - \frac{1}{4}} \ln \left( \frac{x_4}{a} \right) \right] + B_4 \cos \left[ \sqrt{\left( \frac{\bar{a}\rho}{1-a} \right)^2 - \frac{1}{4}} \ln \left( \frac{x_4}{a} \right) \right] \right\} + C_4 x_4 + D_4 \end{array} \right. \quad (7)$$

در این رابطه‌ها،  $\bar{a} = a/h$  و  $\rho^2 = Pl^2/EI_c$  و  $A_i$ ،  $B_i$ ،  $C_i$  و  $D_i$  ( $i=1 \dots 4$ )، ثابت‌های تابع‌اولیه‌گیری هستند. این ثابت‌ها بر پایه‌ی شرط‌های مرزی جدول (۱) و (۲) به دست می‌آیند. خاطر نشان می‌کند، جدول (۱)، شرط‌های



مرزی قاب فولادی ساده با عضوهای منشوری و نامنشوری      تیرها و ستونهای منشوری و نامنشوری را در بر دارند.  
و جدول (۲)، شرطهای مرزی قاب فولادی دروازه‌ای با

جدول (۱): شرطهای مرزی قاب فولادی ساده

| شماره‌ی شرط | شماره گره | عضوها منشوری                                | ستونها نامنشوری                                      |
|-------------|-----------|---------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| ۱           | ۱         | $w_1(0) = 0$                                | $w_1(a) = 0$                                         |
| ۲           | ۱         | $M_1(0) + K_{fL} w'_1(0) = 0$               | $M_1(a) + K_{fL} w'_1(a) = 0$                        |
| ۳           | ۲         | $w_2(0) = 0$                                | $w_2(0) = 0$                                         |
| ۴           | ۲         | $M_1(l_c) + M_2(0) = 0$                     | $M_1(a + l_c) + M_2(0) = 0$                          |
| ۵           | ۲         | $M_2(0) = K_{cL} [w'_1(l_c) - w'_2(0)]$     | $M_2(0) = K_{cL} [w'_1(a + l_c) - w'_2(0)]$          |
| ۶           | ۲         | $w_1(l_c) - w_3(l_c) = 0$                   | $w_1(a + l_c) - w_3(a + l_c) = 0$                    |
| ۷           | ۳         | $V_1(l_c) + V_3(l_c) + K_b w_3(l_c) = 0$    | $V_1(a + l_c) + V_3(a + l_c) + K_b w_3(a + l_c) = 0$ |
| ۸           | ۳         | $w_2(l_b) = 0$                              | $w_2(l_b) = 0$                                       |
| ۹           | ۳         | $M_2(l_b) + M_3(l_c) = 0$                   | $M_2(l_b) + M_3(a + l_c) = 0$                        |
| ۱۰          | ۳         | $M_2(l_b) = K_{cR} [w'_2(l_b) - w'_3(l_c)]$ | $M_2(l_b) = K_{cR} [w'_2(l_b) - w'_3(a + l_c)]$      |
| ۱۱          | ۴         | $w_3(0) = 0$                                | $w_3(a) = 0$                                         |
| ۱۲          | ۴         | $M_3(0) + K_{fR} w'_3(0) = 0$               | $M_3(a) + K_{fR} w'_3(a) = 0$                        |

جدول (۲): شرایط مرزی قاب فولادی دروازه‌ای

| شماره‌ی شرط | شماره گره | عضوها منشوری                                | تیرها و ستونها نامنشوری               |
|-------------|-----------|---------------------------------------------|---------------------------------------|
| ۱           | ۱         | $w_1(0) = 0$                                | $w_1(a) = 0$                          |
| ۲           | ۱         | $M_1(0) + K_{fL} w'_1(0) = 0$               | $M_1(a) + K_{fL} w'_1(a) = 0$         |
| ۳           | ۲         | $w_2(l_b) - w_1(l_c) \sin \alpha = 0$       | $w_2(g) - w_1(h) \sin \alpha = 0$     |
| ۴           | ۲         | $w_1(l_c) - w_4(l_c) = 0$                   | $w_1(h) - w_4(h) = 0$                 |
| ۵           | ۲         | $M_1(l_c) + M_2(l_b) = 0$                   | $M_1(h) + M_2(g) = 0$                 |
| ۶           | ۲         | $M_2(l_b) = K_{cL} [w'_2(l_b) - w'_1(l_c)]$ | $M_2(g) = K_{cL} [w'_2(g) - w'_1(h)]$ |
| ۷           | ۳         | $w_2(0) - w_1(l_c) \sin \alpha = 0$         | $w_2(b) - w_1(h) \sin \alpha = 0$     |
| ۸           | ۳         | $w_3(0) - w_4(l_c) \sin \alpha = 0$         | $w_3(b) - w_4(h) \sin \alpha = 0$     |
| ۹           | ۳         | $M_2(0) + M_3(0) = 0$                       | $M_2(b) + M_3(b) = 0$                 |
| ۱۰          | ۳         | $w'_2(0) - w'_3(0) = 0$                     | $w'_2(b) - w'_3(b) = 0$               |
| ۱۱          | ۴         | $w_3(l_b) - w_4(l_c) \sin \alpha = 0$       | $w_3(g) - w_4(h) \sin \alpha = 0$     |
| ۱۲          | ۴         | $V_1(l_c) + V_4(l_c) + K_b w_4(l_c) = 0$    | $V_1(h) + V_4(h) + K_b w_4(h) = 0$    |
| ۱۳          | ۴         | $M_3(l_b) + M_4(l_c) = 0$                   | $M_3(g) + M_4(h) = 0$                 |
| ۱۴          | ۴         | $M_3(l_b) = K_{cR} [w'_3(l_b) - w'_4(l_c)]$ | $M_3(g) = K_{cR} [w'_3(g) - w'_4(h)]$ |
| ۱۵          | ۵         | $w_4(0) = 0$                                | $w_4(a) = 0$                          |
| ۱۶          | ۵         | $M_4(0) + K_{fR} w'_4(0) = 0$               | $M_4(a) + K_{fR} w'_4(a) = 0$         |



با وارد نمودن این شرطها و معرفی عاملهای بدون بُعد ضریب بار فشاری،  $\varphi^2 = Pl_c^2 / EI_c$ ، ضریب بار کمانشی،  $\bar{g} = g/h$ ،  $\bar{b} = b/h$ ،  $\bar{a} = a/h$ ،  $\rho_{cr}^2 = P_{cr} l_c^2 / EI_c$ ، ضریبهای سختی تکیه‌گاهی چپ و راست،  $\bar{K}_{fL} = 1/(1+EI_c/K_{fL} l_c)$  و  $\bar{K}_{fR} = 1/(1+EI_c/K_{fR} l_c)$ ، ضریبهای سختی پیوند تیر به ستون چپ و راست،  $\bar{K}_{cL} = 1/(1+EI_b/K_{cL} l_b)$  و  $\bar{K}_{cR} = 1/(1+EI_b/K_{cR} l_b)$  و ضریب سختی تکیه‌گاه جانبی

ماتریس پایداری قابهای ساده و دروازه‌ای (ضریبهای نامعین تغییرشکلها)، به ترتیب، همانند رابطه‌های (۸) و (۹) در دسترس قرار می‌گیرند. درایه‌های این ماتریسها برای قابهای منشوری و نامنشوری در پیوست آمده است. باید افزود، گستره‌ی تغییر ضریبهای سختی پیوند عضوها و تکیه‌گاهها از صفر تا یک می‌باشد.

$$K = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} & K_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{3,8} & K_{3,9} & K_{3,10} & K_{3,11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{4,8} & K_{4,9} & K_{4,10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{5,5} & K_{5,6} & K_{5,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{6,1} & K_{6,2} & K_{6,3} & K_{6,4} & 0 & 0 & 0 & K_{6,8} & K_{6,9} & K_{6,10} & K_{6,11} & 0 \\ 0 & 0 & K_{7,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{7,8} & K_{7,9} & K_{7,10} & K_{7,11} & 0 \\ K_{8,1} & K_{8,2} & 0 & 0 & 0 & K_{8,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{9,1} & K_{9,2} & K_{9,3} & 0 & 0 & K_{9,6} & K_{9,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{10,5} & K_{10,6} & 0 & K_{10,8} & K_{10,9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{11,5} & K_{11,6} & K_{11,7} & K_{11,8} & K_{11,9} & K_{11,10} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۸)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} & K_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{3,13} & K_{3,14} & K_{3,15} & K_{3,16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{4,13} & K_{4,14} & K_{4,15} & 0 & 0 \\ K_{5,1} & K_{5,2} & K_{5,3} & K_{5,4} & K_{5,5} & K_{5,6} & K_{5,7} & K_{5,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{6,1} & K_{6,2} & K_{6,3} & K_{6,4} & K_{6,5} & K_{6,6} & K_{6,7} & K_{6,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{7,9} & K_{7,10} & K_{7,11} & K_{7,12} & K_{7,13} & K_{7,14} & K_{7,15} & K_{7,16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{8,9} & K_{8,10} & K_{8,11} & K_{8,12} & K_{8,13} & K_{8,14} & K_{8,15} & K_{8,16} & 0 \\ K_{9,1} & K_{9,2} & K_{9,3} & K_{9,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{9,13} & K_{9,14} & K_{9,15} & K_{9,16} & 0 \\ 0 & 0 & K_{10,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{10,13} & K_{10,14} & K_{10,15} & K_{10,16} & 0 \\ K_{11,1} & K_{11,2} & 0 & 0 & K_{11,5} & K_{11,6} & 0 & K_{11,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{12,1} & K_{12,2} & K_{12,3} & 0 & 0 & K_{12,6} & K_{12,7} & K_{12,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{13,9} & K_{13,10} & 0 & K_{13,12} & K_{13,13} & K_{13,14} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{14,9} & K_{14,10} & K_{14,11} & K_{14,12} & K_{14,13} & K_{14,14} & K_{14,15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{15,6} & 0 & K_{15,8} & 0 & K_{15,10} & 0 & K_{15,12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{16,5} & K_{16,6} & K_{16,7} & K_{16,8} & K_{16,9} & K_{16,10} & K_{16,11} & K_{16,12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۹)$$

$$\det K=0 \quad (۱۰)$$

به سخن دیگر، از برابری دترمینان ماتریسهای رابطه‌های (۸) و (۹) با صفر، ضریب بار کمانشی،  $\rho^2_{cr}$  و به دنبال آن، بار کمانشی قاب،  $P_{cr}$  از رابطه‌ی (۱۱) به دست می‌آید.

$$P_{cr} = \rho_{cr}^2 \frac{EI_c}{l_c^2} \quad (۱۱)$$

در ادامه، برای واری واری راهکار پیشنهادی، بار کمانشی چند قاب ساده و دروازه‌ای، همانند جدول (۳)، تعیین و پاسخها، با نتیجه‌های دیگر مرجعها و فن جزء محدود، سنجیده شده است. بر پایه‌ی پاسخهای جدول (۳)، درستی

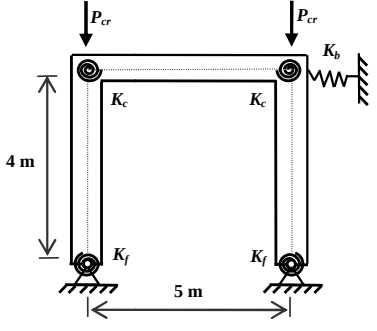
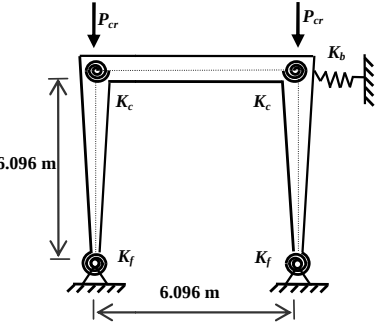
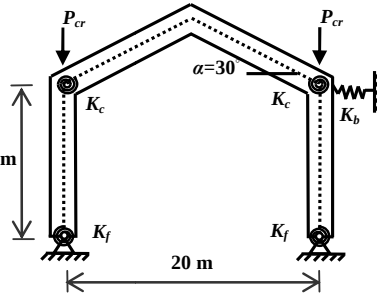
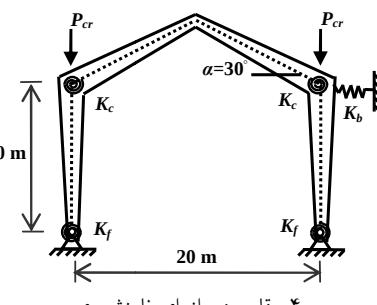
به سخن دیگر، هنگامی که سختی انتقالی یا دورانی تکیه‌گاهها یا سختی دورانی پیوندها، به سمت بی‌نهایت میل کند، نظیر قاب مهاربندی شده، تکیه‌گاه گیردار و پیوند سخت، مقدار این ضریبها، با توجه به تعریف، برابر با یک می‌باشند. از سوی دیگر، هنگامی که سختی دورانی پیوندها یا تکیه‌گاهها و سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی صفر باشد، نظیر پیوند ساده، تکیه‌گاه ساده و قاب مهاربندی نشده، این ضریبها برابر صفر خواهند بود. اکنون از برابر صفر قرار دادن دترمینان ماتریسهای بالا، می‌توان بار کمانشی قاب را همانند رابطه‌ی زیر به دست آورد:



و دقت روش ارائه شده، تأیید می‌گردد. خاطر نشان می‌کند، فشاری وارد بر آن‌ها، یکسان هستند. همچنین، به طور معمول، سختی‌های دورانی پیوندها و تکیه‌گاه‌های چپ و راست با هم برابر خواهند بود.

در نمونه‌های اجرایی این گونه قاب‌ها، مقطع ستون‌های قاب همانند بوده و با بارهای فشاری برابر بارگذاری می‌شوند. به سخن دیگر، لنگر لختی ستون‌ها و نیروی

جدول (۳): بار کمانشی قاب‌های نمونه در تحلیل پایداری

| بار کمانشی ( $P_{cr}$ ) |                | مشخصه‌های اعضا و مقطع‌های قاب                                                                                                                                                                                                                                  | شکل قاب                                                                               |
|-------------------------|----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| ۴۶۵۹ kN                 | روش پیشنهادی   | $E=210 \text{ GPa}$<br>$I_b=8360 \text{ cm}^4$<br>$I_c=7760 \text{ cm}^4$<br>$K_f \rightarrow \infty \text{ kN.m/rad}$<br>$K_c=7556/6085 \text{ kN.m/rad}$<br>$K_b=0 \text{ kN.m}$                                                                             |    |
| ۴۶۵۸ kN                 | مرجع [۲۲]      |                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                       |
| ۴۶۵۵ kN                 | مرجع [۲۳]      |                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                       |
| ۴۶۶۰ kN                 | F.E.M.         |                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                       |
| ۸۰۴ kN                  | روش پیشنهادی   | $E=207 \text{ GPa}$<br>$I_b=34900 \text{ cm}^4$<br>$I_c=20655 \text{ cm}^4$<br>$K_f=0 \text{ kN.m/rad}$<br>$K_c \rightarrow \infty \text{ kN.m/rad}$<br>$K_b=0 \text{ kN.m}$                                                                                   |   |
| ۷۷۹ kN                  | مرجع [۲۴ و ۲۵] |                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                       |
|                         |                |                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                       |
| ۷۹۲ kN                  | F.E.M.         |                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                       |
| ۱۹۳۰ kN                 | روش پیشنهادی   | $E=210 \text{ kN/m}^2$<br>$I_b=3671 \text{ cm}^4$<br>$I_c=3671 \text{ cm}^4$<br>$K_f \rightarrow \infty \text{ kN.m/rad}$<br>$K_c \rightarrow \infty \text{ kN.m/rad}$<br>$K_b \rightarrow \infty \text{ kN.m}$                                                |  |
| ---                     | مرجع           |                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                       |
|                         |                |                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                       |
| ۱۹۳۰ kN                 | F.E.M.         |                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                       |
| ۲۰۸۳ kN                 | روش پیشنهادی   | $E=210 \text{ kN/m}^2$<br>$I_b=3671 \text{ cm}^4$<br>$I_c=3671 \text{ cm}^4$<br>$I_{b-c}=14684 \text{ cm}^4$<br>$I_{c-b}=14684 \text{ cm}^4$<br>$K_f=0 \text{ kN.m/rad}$<br>$K_c \rightarrow \infty \text{ kN.m/rad}$<br>$K_b \rightarrow \infty \text{ kN.m}$ |  |
| ۲۰۸۴ kN                 | مرجع [۲۶]      |                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                       |
|                         |                |                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                       |
| ۲۰۸۴ kN                 | F.E.M.         |                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                       |

### ۳- ارزیابی احتمال شکست در پایداری قاب‌ها

راهکارهای گوناگونی برای برآورد احتمال شکست سازه‌ها وجود دارد که یکی از ساده‌ترین و متداول‌ترین آن‌ها، روش شبیه‌سازی مونت کارلو می‌باشد [۲]. با وجود سادگی فن مونت کارلو، این شیوه یکی از قوی‌ترین روش‌ها در تحلیل‌های احتمال‌اندیشانه است. بر پایه‌ی راهکار مونت کارلو، احتمال شکست سازه از رابطه‌ی (۱۲) به دست می‌آید.

$$P_f = \frac{N_f}{N_t} \quad (12)$$

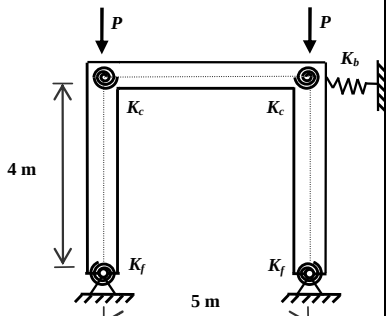
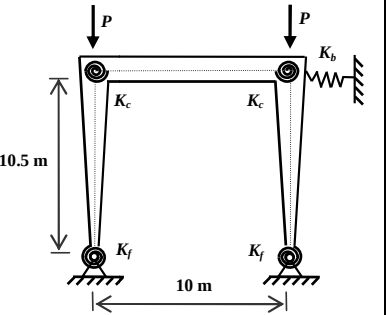
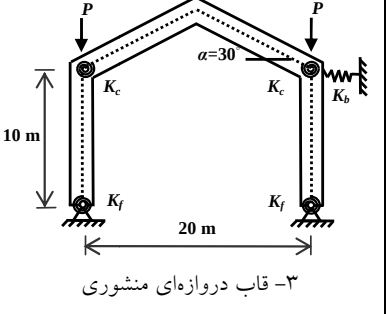
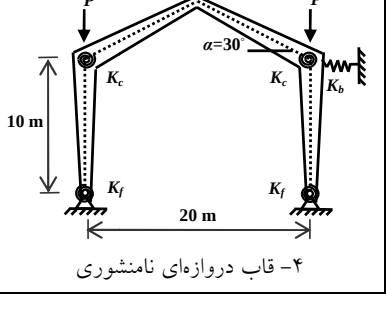
در رابطه‌ی کنونی،  $N_t$  شمار کل شبیه‌سازی‌ها و  $N_f$  شمار حالت‌هایی است که در یک شبیه‌سازی، سازه نتواند هدف‌های طرح را برآورده سازد.

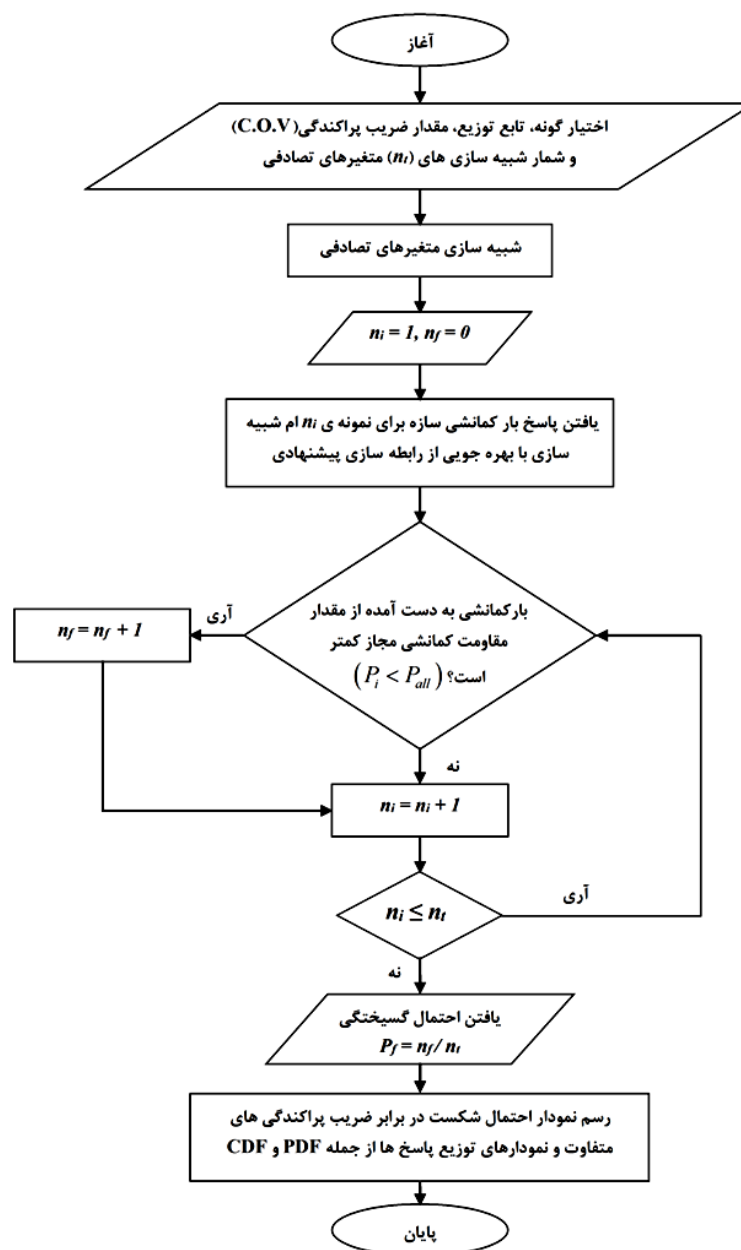
در این بخش، به منظور ارزیابی احتمال شکست در پایداری قاب‌ها، بر پایه‌ی راهکار پیشنهادی و روش شبیه‌سازی مونت کارلو، تحلیل احتمالاتی چند قاب ساده و دروازه‌ای با پیوندها و تکیه‌گاه‌های نرم، همانند جدول (۴) انجام می‌پذیرد. در این میان، سختی پیوندهای تکیه‌گاهی و عضوی به عنوان متغیرهای تصادفی اختیار می‌گردند. باید افزود، مقدارهای میانگین این متغیرها از حالتی که ضریب‌های سختی پیوند عضوها و تکیه‌گاه‌ها برابر نیم باشند به دست آمده است. همچنین، برای سادگی و فهم بهتر، ضریب‌های گیرداری تکیه‌گاه‌ها و پیوندهای چپ و راست قاب‌ها، برابر پنداشته خواهند شد. در ادامه، برای هر یک از متغیرهای تصادفی، دو گونه توزیع نرمال و لگ‌نرمال با ضریب‌های پراکندگی متفاوت از ۵ تا ۲۵ درصد در نظر گرفته می‌شود. سپس، با بهره‌گیری از روش شبیه‌سازی مونت کارلو، با بررسی کفایت شمار شبیه‌سازی‌ها، در هر توزیع و برای هر ضریب پراکندگی، هزار متغیر تصادفی برای سختی دورانی پیوندهای تیر به ستون‌ها، سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی و سختی دورانی پیوندهای ستون‌ها به تکیه‌گاه‌ها تولید می‌گردد. اکنون با در اختیار داشتن مقدارهای شبیه‌سازی شده و بهره‌گیری از

روش پیشنهادی، تحلیل پایداری قاب برای توزیع‌ها و ضریب‌های پراکندگی متفاوت انجام می‌پذیرد. سرانجام، با سنجش مقاومت کمانشی نمونه‌های شبیه‌سازی شده با مقدار هدف و بهره‌جویی از رابطه‌ی (۱۲)، احتمال شکست قاب به دست می‌آید. باید افزود، که در این‌جا، مقدار هدف، مقاومت کمانشی مجاز قاب است که با وارد نمودن ضریب اطمینان، ضریبی از پاسخ بار کمانشی سازه با مقدار میانگین متغیرهای تصادفی اختیار می‌گردد. به سخن دیگر، احتمال شکست سازه در تحلیل احتمال‌اندیشانه، به صورت احتمال کاهش مقاومت کمانشی قاب نسبت به مقدار مجاز تعریف می‌شود. همچنین، با رسم برخی از نمودارهای کاربردی، مانند نمودار احتمال شکست سازه در برابر ضریب‌های پراکندگی و نمودارهای تابع چگالی احتمال (PDF) و تابع توزیع تجمعی (CDF) پاسخ‌ها، به بررسی احتمال شکست در پایداری قاب‌های یاد شده بر حسب گونه‌ی توزیع و ضریب پراکندگی متغیرهای تصادفی پرداخته می‌شود. افزون بر این‌ها، نمودار جریان برآورد احتمال شکست این گونه سازه‌ها در شکل (۳) می‌آید. بر این پایه، نخست، برای بررسی کفایت شمار شبیه‌سازی‌ها ( $n_i$ )، نمودار احتمال شکست قاب ساده‌ی منشوری در برابر شمار شبیه‌سازی‌ها برای توزیع‌های نرمال و لگ‌نرمال با ضریب پراکندگی ۱۰ درصد و تصادفی پنداشتن هر سه عامل یاد شده در شکل (۴) می‌آید. می‌توان دید، هنگامی که شمار شبیه‌سازی هزار نمونه باشد، احتمال شکست از دقت بالایی برخوردار است. بر این پایه، برای هر بار تحلیل، از هزار نمونه‌ی شبیه‌سازی بهره‌جویی می‌گردد. در ادامه، نمودار احتمال شکست قاب‌های جدول (۴)، در برابر ضریب پراکندگی‌های ۵ تا ۲۵ درصد و با توزیع‌های نرمال و لگ‌نرمال، برای تصادفی پنداشتن سختی دورانی پیوند ستون به تکیه‌گاه، سختی دورانی پیوند تیر به ستون‌ها و سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی، به ترتیب، در شکل‌های (۵) تا (۷) آمده است.

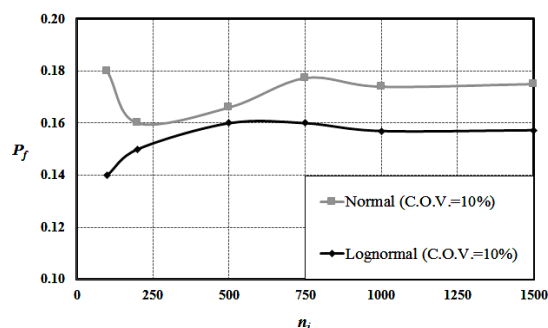


جدول (۴): قاب‌های مورد ارزیابی در تحلیل احتمالاتی

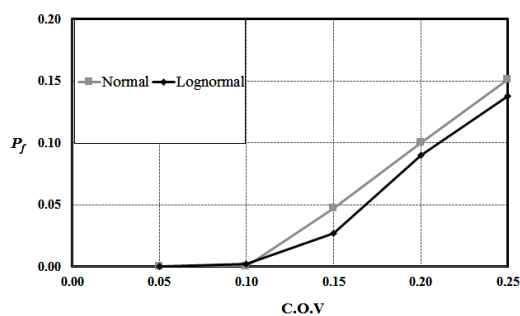
| مقاومت کماتشی<br>( $P_{all}$ ) | ضریب اطمینان<br>( $S.F.$ ) | مقدارهای میانگین<br>متغیرهای تصادفی                                                           | مشخصه‌های اعضا<br>و مقطع‌ها                                                                                                                               | شکل قاب                                                                                                            |
|--------------------------------|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ۱۹۴۲ kN                        | ۱/۰۵                       | $K_f=4074 \text{ kN.m/rad}$<br>$K_c=3511/2 \text{ kN.m/rad}$<br>$K_b=254/625 \text{ kN.m}$    | $E=210 \text{ kN/m}^2$<br>$I_b=8360 \text{ cm}^4$<br>$I_c=7760 \text{ cm}^4$                                                                              | <br>۱- قاب ساده‌ی منشوری        |
| ۱۰۷۴۷۴ kg                      | ۱/۰۵                       | $K_f=413100 \text{ kN.m/rad}$<br>$K_c=732900 \text{ kN.m/rad}$<br>$K_b=3746/939 \text{ kN.m}$ | $E=2/1 \square 10^{11} \text{ kN/m}^2$<br>$I_b=34900 \text{ cm}^4$<br>$I_c=20655 \text{ cm}^4$                                                            | <br>۲- قاب ساده‌ی نامنشوری     |
| ۱۲۹ kN                         | ۱/۱۰                       | $K_f=734/2 \text{ kN.m/rad}$<br>$K_c=635/836 \text{ kN.m/rad}$<br>$K_b=7/342 \text{ kN.m}$    | $E=2/0 \square 10^8 \text{ kN/m}^2$<br>$I_b=3671 \text{ cm}^4$<br>$I_c=3671 \text{ cm}^4$                                                                 | <br>۳- قاب دروازه‌ای منشوری   |
| ۱۴۲ kN                         | ۱/۱۰                       | $K_f=734/2 \text{ kN.m/rad}$<br>$K_c=635/836 \text{ kN.m/rad}$<br>$K_b=7/342 \text{ kN.m}$    | $E=2/0 \square 10^8 \text{ kN/m}^2$<br>$I_b=3671 \text{ cm}^4$<br>$I_c=3671 \text{ cm}^4$<br>$I_{b-c}=14684 \text{ cm}^4$<br>$I_{c-b}=14684 \text{ cm}^4$ | <br>۴- قاب دروازه‌ای نامنشوری |



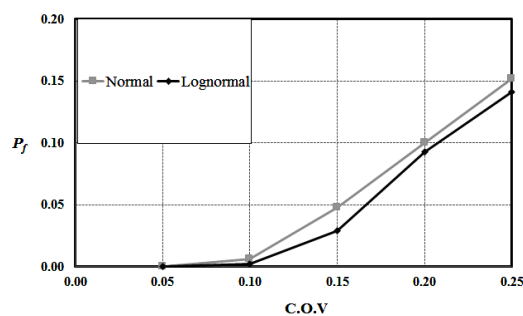
شکل (۳): نمودار جریان برآورد احتمال شکست در پایداری سازه



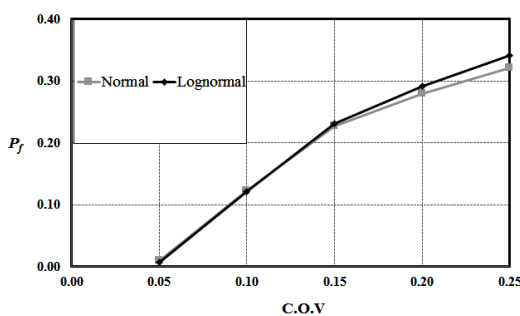
شکل (۴): نمودار تغییر احتمال شکست قاب ساده‌ی منشوری در برابر شمار شبیه‌سازی‌ها



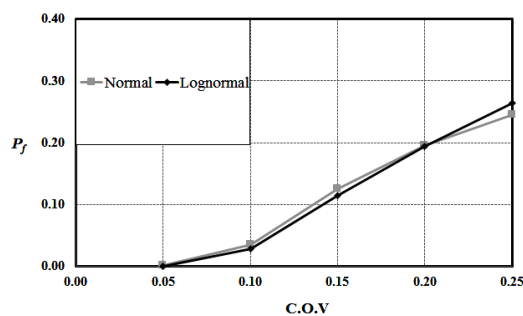
ب) قاب ساده‌ی نامنشوری



الف) قاب ساده‌ی منشوری

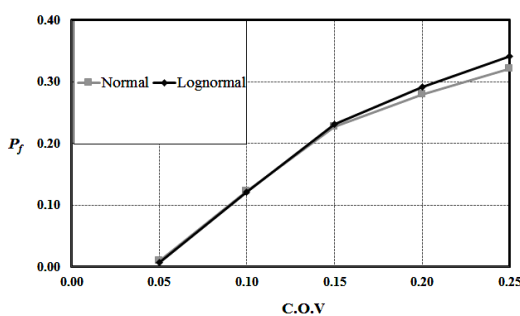


د) قاب دروازه‌ای نامنشوری

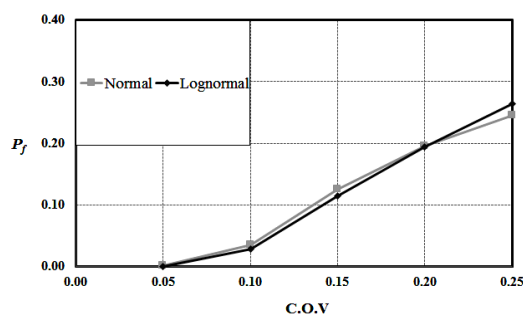


ج) قاب دروازه‌ای منشوری

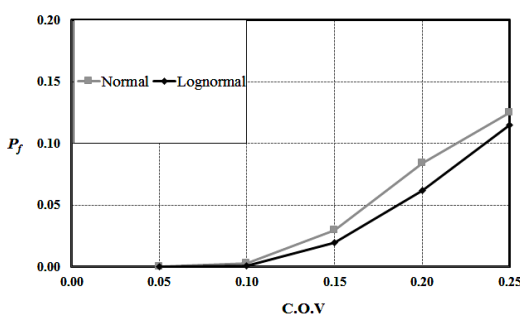
شکل (۵): نمودار احتمال شکست قاب در برابر ضریب پراکندگی برای سختی دورانی پیوند ستون به تکیه‌گاه



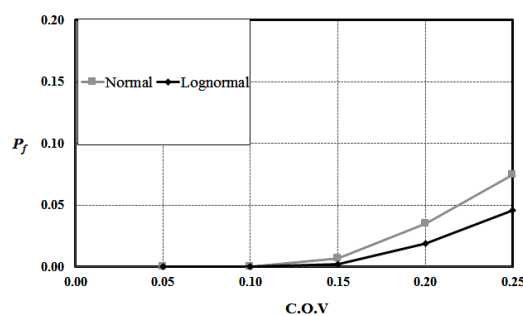
ب) قاب ساده‌ی نامنشوری



الف) قاب ساده‌ی منشوری

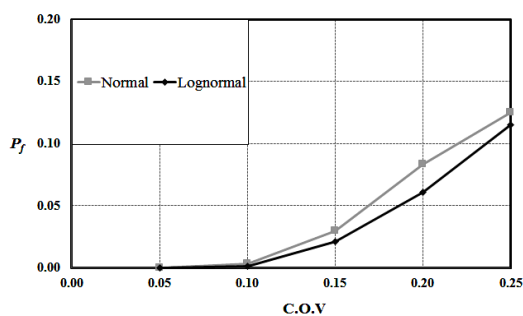


د) قاب دروازه‌ای نامنشوری

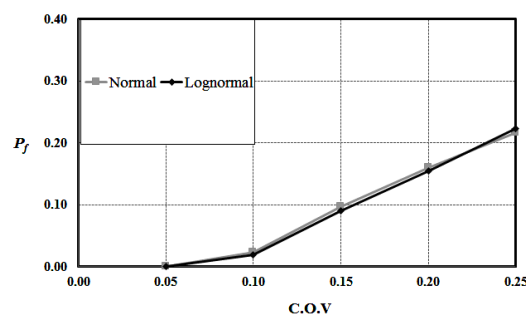


ج) قاب دروازه‌ای منشوری

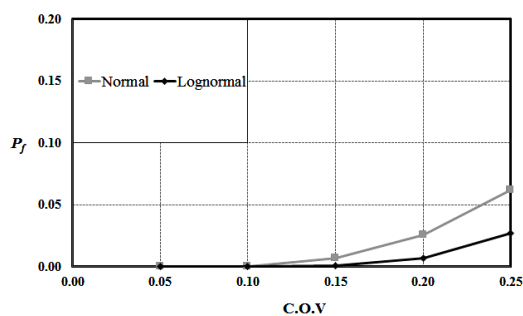
شکل (۶): نمودار احتمال شکست قاب در برابر ضریب پراکندگی برای سختی دورانی پیوند تیر به ستون‌ها



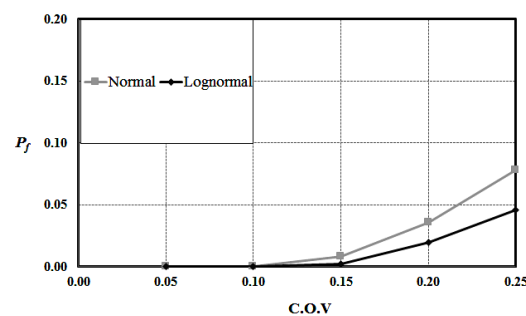
ب) قاب ساده‌ی نامنشوری



الف) قاب ساده‌ی منشوری



د) قاب دروازه‌ای نامنشوری



ج) قاب دروازه‌ای منشوری

شکل (۷): نمودار احتمال شکست قاب در برابر ضریب پراکندگی برای سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی

قاب دروازه‌ای منشوری با تصادفی پنداشتن سختی دورانی پیوند تیر به ستون‌ها و سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی تا ۱۵ درصد به تدریج و پس از آن با شیب زیادتری صورت می‌گیرد. ولی، شیب افزایش احتمال شکست این سازه با تصادفی پنداشتن سختی دورانی پیوند ستون به تکیه‌گاه‌ها، برای ضریب پراکندگی‌های بیش از ۱۰ درصد، به طور تقریبی خطی خواهد بود. افزون بر این‌ها، می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش ضریب پراکندگی، شیب افزایش احتمال شکست قاب دروازه‌ای نامنشوری با تصادفی پنداشتن سختی دورانی پیوند تیرها به ستون‌ها یا سختی دورانی پیوند ستون به تکیه‌گاه تا ۱۰ درصد به کندی و پس از آن با شیب تندتری صورت می‌گیرد. ولی، هنگامی که سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی غیرقطعی پنداشته می‌شود، احتمال شکست قاب و شیب افزایش آن بسیار ناچیز می‌باشد.

با سنجش نمودار احتمال شکست سازه‌های جدول (۴)، برای دو توزیع نرمال و لگ‌نرمال، می‌توان نتیجه گرفت که احتمال شکست به طور نسبی مستقل از گونه‌ی تابع توزیع احتمال خواهد بود. با وجود این، برای ضریب

همان‌گونه که در شکل‌های (۵) تا (۷) دیده می‌شود، برای ضریب پراکندگی‌های کم، احتمال شکست ناچیز است، ولی با زیاد شدن مقدار ضریب پراکندگی، احتمال شکست قاب‌ها افزایش می‌یابد. می‌توان دید که با افزایش ضریب پراکندگی، شیب افزایش احتمال شکست قاب ساده‌ی منشوری با تصادفی پنداشتن سختی دورانی پیوند تیر به ستون‌ها و سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی تا ۱۰ درصد به تدریج و پس از آن با شیب زیادتری صورت می‌گیرد. ولی، هنگامی که سختی دورانی پیوند ستون به تکیه‌گاه غیرقطعی است، شیب افزایش احتمال شکست این سازه به طور تقریبی خطی خواهد بود. با وجود این، در قاب ساده‌ی نامنشوری، با افزایش ضریب پراکندگی سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی، شیب افزایش احتمال شکست سازه تا ۱۰ درصد به کندی و پس از آن با شیب تندتری صورت می‌گیرد. ولی، هنگامی که سختی دورانی پیوند تیر به ستون‌ها یا سختی دورانی پیوند ستون به تکیه‌گاه غیرقطعی پنداشته می‌شوند، شیب افزایش احتمال شکست این قاب، به طور تقریبی خطی می‌باشد. همچنین، دیده می‌شود که با افزایش ضریب پراکندگی، شیب افزایش احتمال شکست

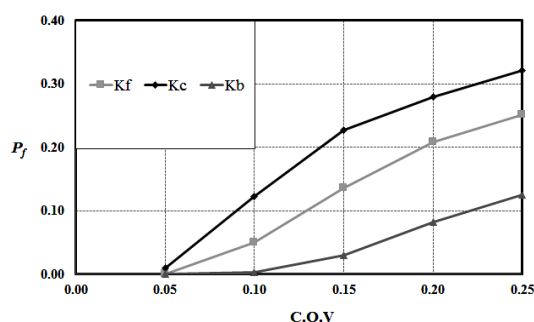


پراکندگی‌های بیشتر از ۲۰ درصد، احتمال شکست قاب ساده‌ی منشوری با لگ‌نرمال پنداشتن متغیرهای تصادفی، همواره بیشتر از نرمال در نظر گرفتن آن‌ها می‌باشد. در برابر آن، برای ضریب پراکندگی‌های متفاوت، احتمال شکست قاب‌های دروازه‌ای منشوری و نامنشوری با نرمال پنداشتن متغیرهای تصادفی، همواره بیشتر از لگ‌نرمال در نظر گرفتن آن‌ها خواهد بود.

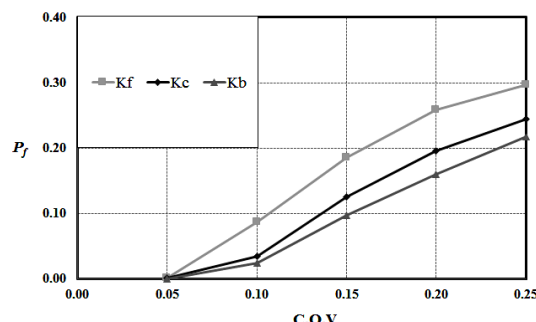
برای سنجش اثر گونه‌ی متغیر تصادفی در تحلیل احتمال اندیشانه‌ی پایداری سازه، نمودار احتمال شکست قاب‌های مورد ارزیابی، برای سه گونه متغیر سختی دورانی پیوند ستون به تکیه‌گاه، سختی دورانی پیوند تیر به ستون‌ها و سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی با توزیع‌های نرمال و لگ‌نرمال در شکل‌های (۸) و (۹) رسم شده است. بر پایه‌ی شکل‌های (۸) و (۹) دیده می‌شود، احتمال شکست قاب ساده‌ی منشوری و همچنین، قاب‌های

دروازه‌ی منشوری و نامنشوری، نسبت به متغیر سختی دورانی پیوند ستون به تکیه‌گاه در سنجش با دیگر متغیرها از حساسیت بیشتری برخوردار است. ولی در قاب ساده‌ی نامنشوری، احتمال شکست سازه نسبت به متغیر سختی دورانی پیوند تیر به ستون‌ها حساس‌تر می‌باشد.

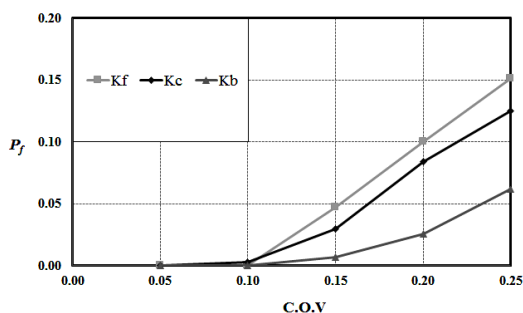
نمودارهای احتمال شکست سازه‌ها در حالتی که هر سه متغیر متغیر سختی دورانی پیوند ستون به تکیه‌گاه، سختی دورانی پیوند تیر به ستون‌ها و سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی به طور همزمان غیرقطعی باشند، در شکل (۱۰) آمده است. همان گونه که در این شکل دیده می‌شود، برای هر ضریب پراکندگی، پاسخ سازه، به طور تقریبی، مستقل از گونه‌ی توزیع احتمال می‌باشد. این پدیده به آن سبب است که نمودار فراوانی پاسخ قاب‌ها برای هر دو توزیع نرمال و لگ‌نرمال همانند می‌باشد.



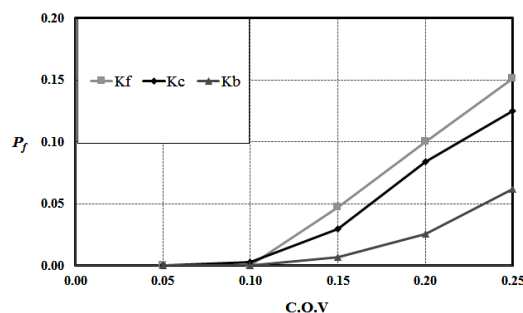
ب) قاب ساده‌ی نامنشوری



الف) قاب ساده‌ی منشوری



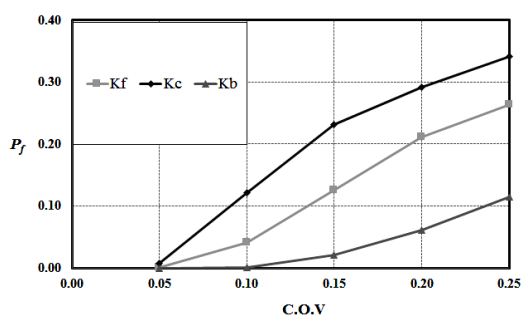
د) قاب دروازه‌ای نامنشوری



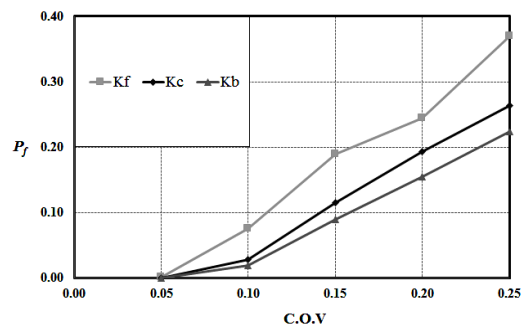
ج) قاب دروازه‌ای منشوری

شکل (۸): نمودار احتمال شکست قاب بر حسب ضریب پراکندگی متغیرهای تصادفی گوناگون برای توزیع نرمال

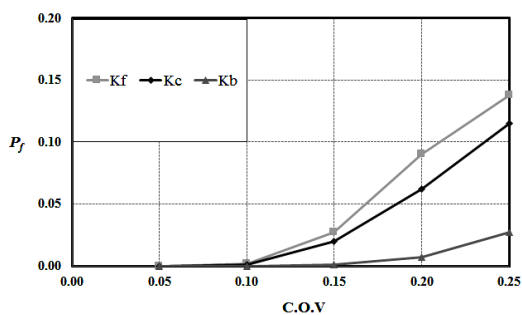




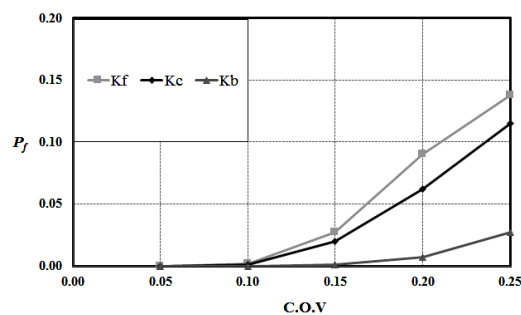
ب) قاب ساده‌ی نامنشوری



الف) قاب ساده‌ی منشوری

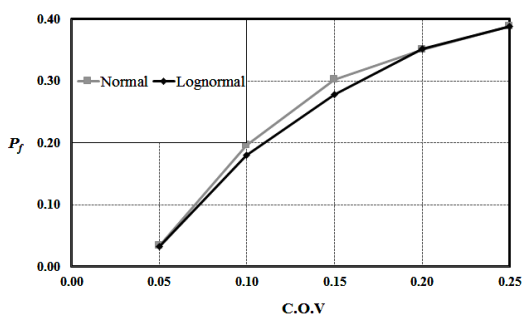


د) قاب دروازه‌ای نامنشوری

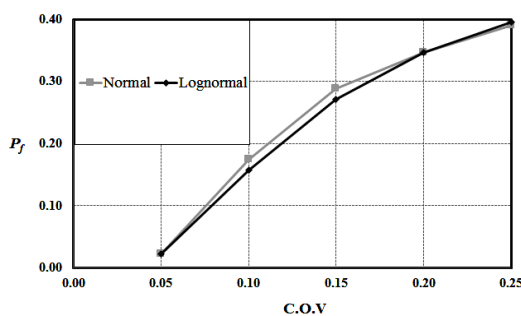


ج) قاب دروازه‌ای منشوری

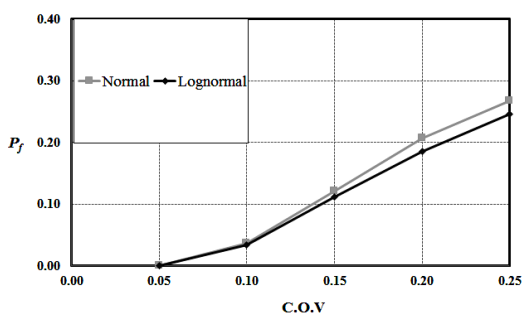
شکل (۹): نمودار احتمال شکست قاب بر حسب ضریب پراکندگی متغیرهای تصادفی گوناگون برای توزیع لگ‌نرمال



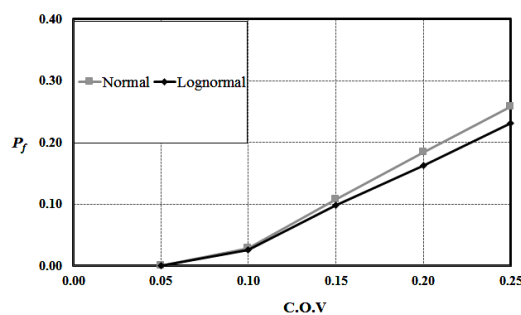
ب) قاب ساده‌ی نامنشوری



الف) قاب ساده‌ی منشوری



د) قاب دروازه‌ای نامنشوری

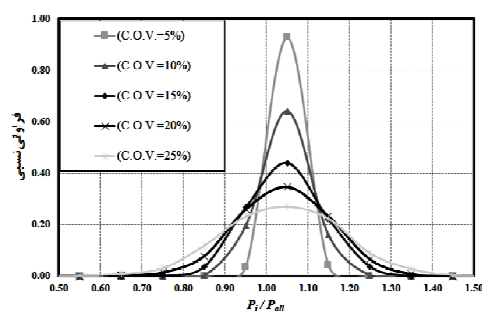


ج) قاب دروازه‌ای منشوری

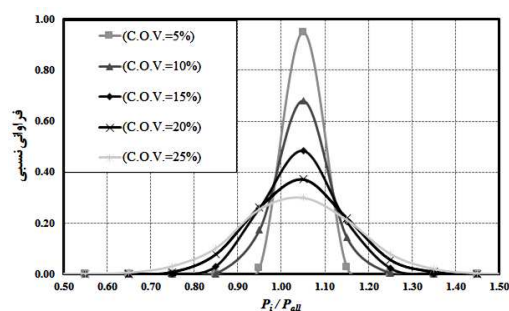
شکل (۱۰): نمودار احتمال شکست قاب بر حسب ضریب پراکندگی با تصادفی پنداشتن هر سه متغیر

شکل‌های (۱۱) و (۱۲)، به ترتیب، نمودارهای تابع چگالی احتمال پاسخ‌های (PDF) این حالت را برای توزیع‌های نرمال و لگ‌نرمال نشان می‌دهند. افزون بر این، نمودارهای تابع توزیع تجمعی پاسخ‌های (CDF) حالت کنونی، برای توزیع‌های نرمال و لگ‌نرمال، به ترتیب، در شکل (۱۳) و (۱۴) به نمایش درآمده است. یادآوری می‌شود که سطح زیر نمودار تابع چگالی احتمال و عدد فراوانی نسبی در نمودار تابع توزیع تجمعی، نشان دهنده‌ی احتمال شکست سازه‌ها می‌باشند. برای نمونه، هنگامی که احتمال شکست قاب، به صورت احتمال کاهش مقاومت کماتشی سازه نسبت به مقدار مجاز تعریف شود، سطح زیر نمودار تابع چگالی احتمال پاسخ‌ها تا نسبت  $P_f/P_{all} \leq 1/0$  نشان دهنده‌ی احتمال شکست سازه می‌باشد. در شکل (۱۵) این سطح برای توزیع‌های نرمال با ضریب پراکندگی ۱۰ درصد در قاب ساده‌ی منشوری، لگ‌نرمال با ضریب پراکندگی ۲۰ درصد در قاب ساده‌ی منشوری، نرمال با ضریب پراکندگی ۲۰ درصد در قاب دروازه‌ای منشوری و

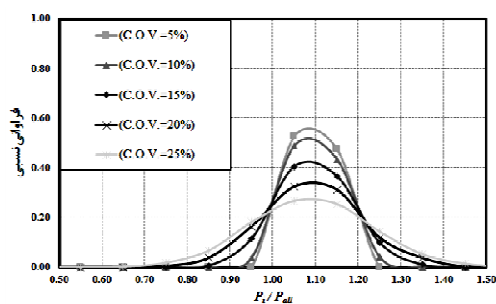
لگ‌نرمال با ضریب پراکندگی ۲۵ درصد در قاب دروازه‌ای منشوری، به ترتیب، برابر با  $P_f = 0/29$ ،  $P_f = 0/35$ ،  $P_f = 0/19$  و  $P_f = 0/25$  به دست می‌آید. همچنین، عدد فراوانی نسبی برای نسبت  $P_f/P_{all} = 1/0$  در نمودار تابع توزیع تجمعی پاسخ‌ها، احتمال شکست را نشان می‌دهد. بر این پایه و همانند شکل (۱۶)، این مقدار نیز برای توزیع‌ها و قاب‌های اشاره شده، به ترتیب، برابر با  $P_f = 0/29$ ،  $P_f = 0/35$ ،  $P_f = 0/19$  و  $P_f = 0/25$  خواهد بود. آشکار است که پاسخ‌ها در هر دو حالت یکسان و به ترتیب، نمایانگر مقدار  $P_f$  برای توزیع‌های نرمال با ضریب پراکندگی ۱۰ درصد در قاب ساده‌ی منشوری، لگ‌نرمال با ضریب پراکندگی ۲۰ درصد در قاب ساده‌ی منشوری، نرمال با ضریب پراکندگی ۲۰ درصد در قاب دروازه‌ای منشوری و لگ‌نرمال با ضریب پراکندگی ۲۵ درصد در قاب دروازه‌ای منشوری، برای نمودارهای شکل (۱۰) می‌باشند.



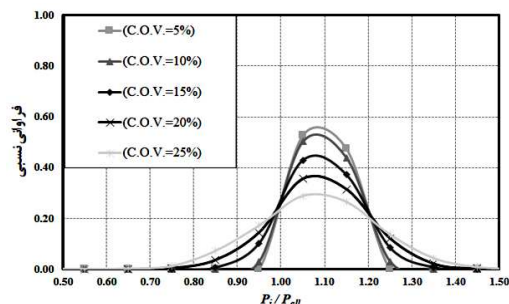
ب) قاب ساده‌ی منشوری



الف) قاب ساده‌ی منشوری



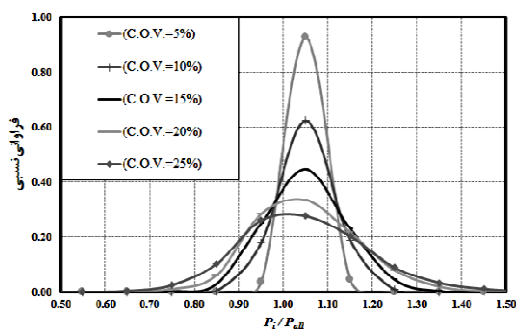
د) قاب دروازه‌ای منشوری



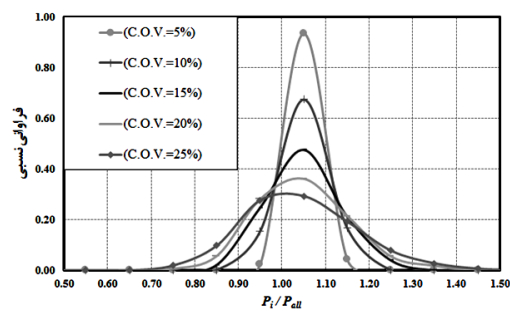
ج) قاب دروازه‌ای منشوری

شکل (۱۱): نمودار چگالی احتمال پاسخ‌های (PDF) قاب برای توزیع نرمال با ضریب‌های پراکندگی متفاوت

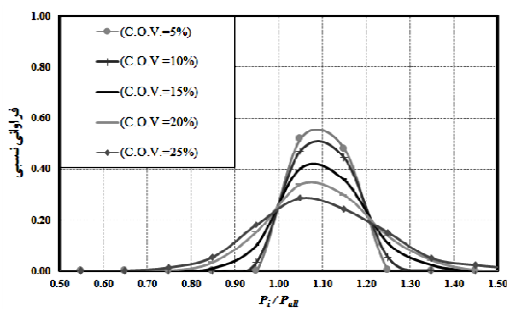




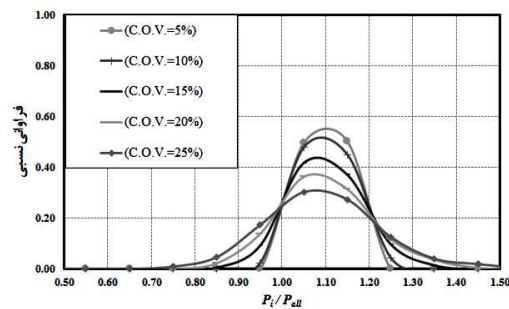
ب) قاب ساده‌ی نامشوری



الف) قاب ساده‌ی مشوری

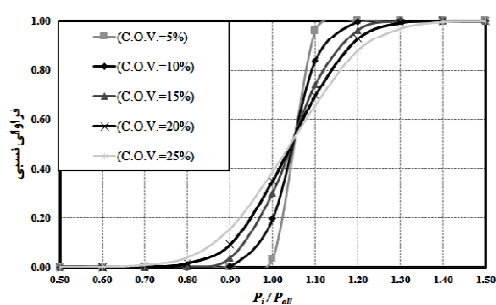


د) قاب دروازه‌ای نامشوری

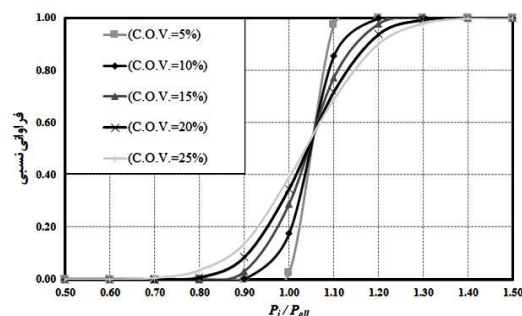


ج) قاب دروازه‌ای مشوری

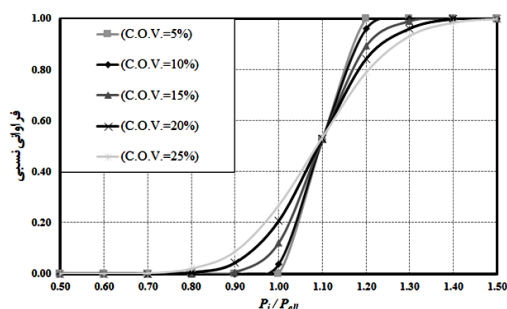
شکل (۱۲): نمودار چگالی احتمال پاسخ‌های (PDF) قاب برای توزیع لگ‌نرمال با ضریب‌های پراکندگی متفاوت



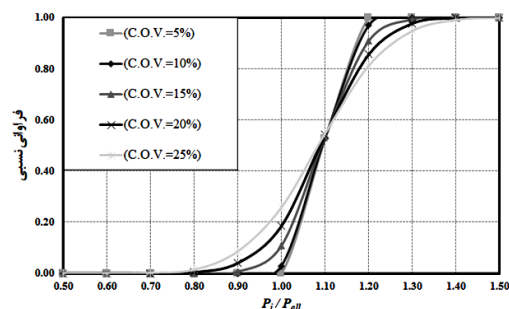
ب) قاب ساده‌ی نامشوری



الف) قاب ساده‌ی مشوری

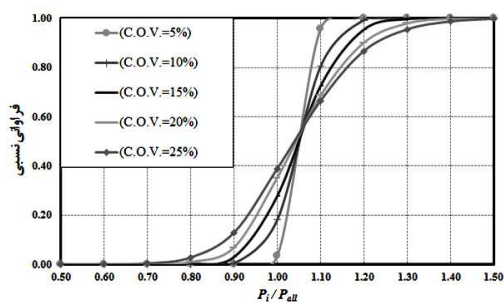


د) قاب دروازه‌ای نامشوری

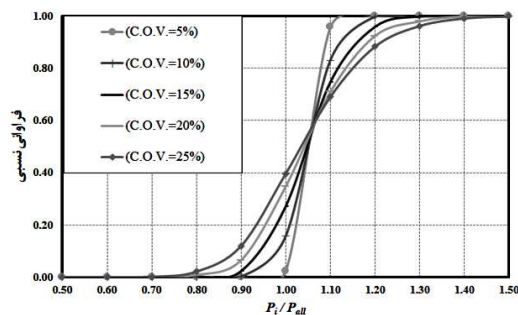


ج) قاب دروازه‌ای مشوری

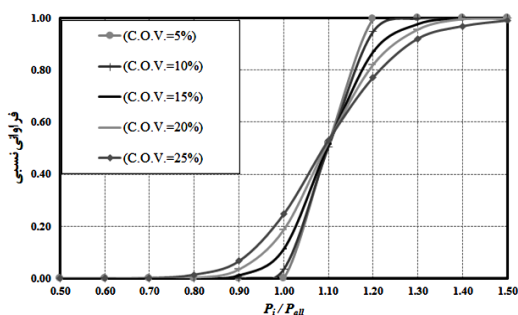
شکل (۱۳): نمودار توزیع تجمعی پاسخ‌ها (CDF) قاب برای توزیع نرمال با ضریب‌های پراکندگی متفاوت



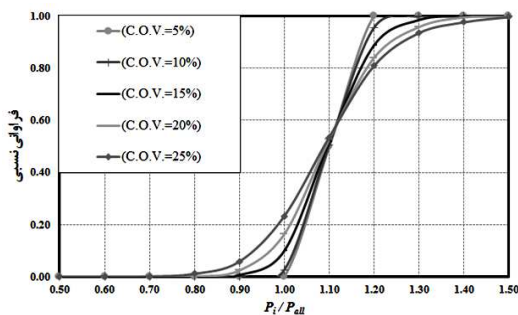
ب) قاب ساده‌ی نامنشوری



الف) قاب ساده‌ی منشوری

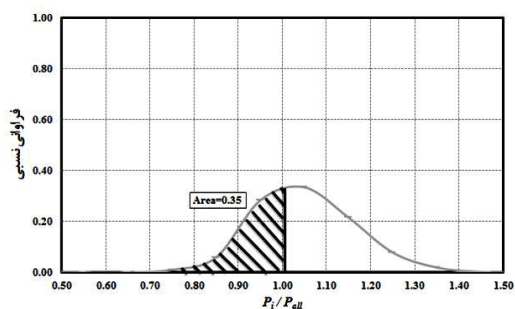


د) قاب دروازه‌ای نامنشوری



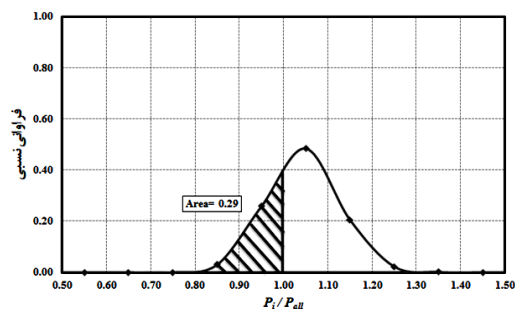
ج) قاب دروازه‌ای منشوری

شکل (۱۴): نمودار توزیع تجمعی پاسخ‌های (CDF) قاب برای توزیع لگ‌نرمال با ضریب‌های پراکندگی متفاوت



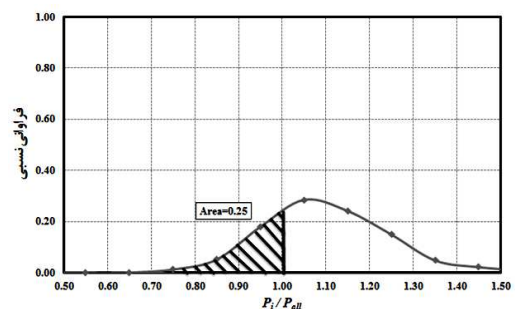
ب) قاب ساده‌ی نامنشوری

(توزیع لگ‌نرمال با ضریب پراکندگی ۲۰ درصد)



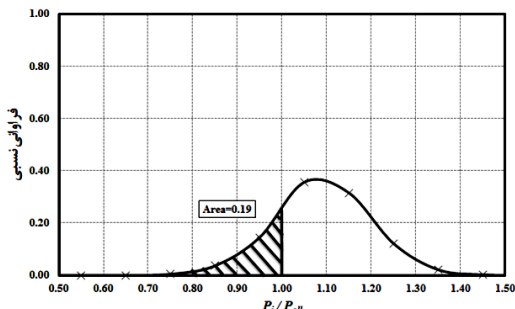
الف) قاب ساده‌ی منشوری

(توزیع نرمال با ضریب پراکندگی ۱۵ درصد)



د) قاب دروازه‌ای نامنشوری

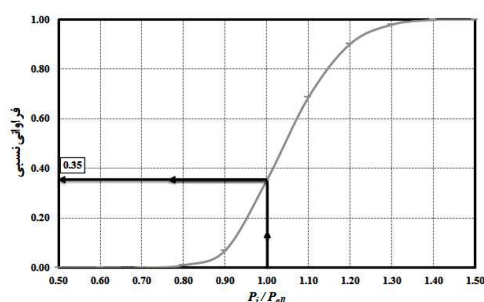
(توزیع لگ‌نرمال با ضریب پراکندگی ۲۵ درصد)



ج) قاب دروازه‌ای منشوری

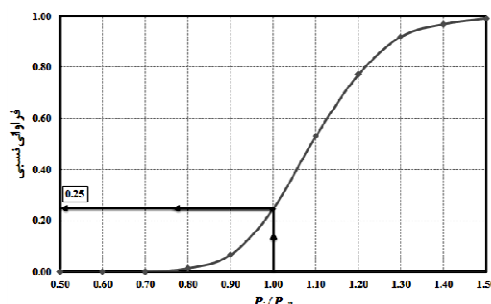
(توزیع نرمال با ضریب پراکندگی ۲۰ درصد)

شکل (۱۵): نمودار چگالی احتمال پاسخ‌های (PDF) قاب



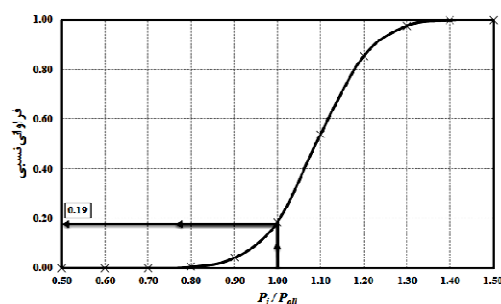
ب) قاب ساده‌ی نامنشوری

(توزیع لگ‌نرمال با ضریب پراکندگی ۲۰ درصد)



الف) قاب ساده‌ی منشوری

(توزیع نرمال با ضریب پراکندگی ۱۵ درصد)



د) قاب دروازه‌ای نامنشوری

(توزیع لگ‌نرمال با ضریب پراکندگی ۲۵ درصد)

ج) قاب دروازه‌ای منشوری

(توزیع نرمال با ضریب پراکندگی ۲۰ درصد)

شکل (۱۶): نمودار توزیع تجمعی پاسخ‌های (CDF) قاب

#### ۴- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله، نخست، با حل دقیق معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر تغییرشکل عضوهای قاب‌های فولادی و با توجه به نگره‌ی تیر اولر-برنولی، راهکاری نوین برای تحلیل پایداری این سازه‌ها ارائه گردید. بر پایه‌ی رابطه‌سازی پیشنهادی، بار کمانش کشسان دقیق قاب‌های ساده و دروازه‌ای با تکیه‌گاه‌ها و پیوندهای نرم و عضوهای منشوری و نامنشوری در دسترس قرار گرفت. باید افزود، دقت و توانایی فن پیشنهادی، با حل نمونه‌های عددی تأیید گردید.

در ادامه، از روش شبیه‌سازی مونت کارلو برای برآورد احتمال شکست در پایداری این گونه قاب‌ها بهره‌جویی گردید. در این میان، سختی دورانی پیوندهای تیر به ستون، سختی دورانی پیوندهای ستون به تکیه‌گاه و سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی، به سبب عدم قطعیت‌هایی مانند چگونگی ساخت، اجرا، نصب و الگوسازی اعضا و پیوندهای قاب‌های فولادی، به عنوان متغیرهای تصادفی اختیار شدند.

باید افزود، برای هر یک از متغیرهای تصادفی، توزیع‌های نرمال و لگ‌نرمال، با ضریب پراکندگی‌های ۵ تا ۲۵ درصد در نظر گرفته شد و بار کمانشی قاب در هر حالت، برای هزار نمونه شبیه‌سازی شده در دسترس قرار گرفت. براین پایه، صدهزار مرتبه از رابطه‌سازی پیشنهادی برای یافتن بار کمانشی قاب‌های شبیه‌سازی شده، بهره‌جویی گردید و اثر تغییرهای ضریب پراکندگی و گونه‌ی تابع توزیع احتمال در مقاومت کمانشی قاب‌های فولادی مورد ارزیابی گرفت. با بررسی پاسخ‌های به دست آمده از تحلیل‌های احتمالاتی، می‌توان به نتیجه‌های زیر دست یافت:

- با افزایش ضریب پراکندگی سختی دورانی پیوند تیر به ستون‌ها و سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی، شیب افزایش احتمال شکست قاب ساده‌ی منشوری تا ۱۰ درصد به تدریج و پس از آن با شیب زیادتری صورت می‌گیرد. ولی، هنگامی که سختی دورانی پیوند ستون به تکیه‌گاه غیرقطعی است، شیب افزایش



احتمال شکست این سازه به طور تقریبی خطی خواهد بود.

■ در قاب ساده‌ی نامنشوری، با افزایش ضریب پراکندگی، شیب افزایش احتمال شکست سازه با تصادفی پنداشتن سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی تا ۱۰ درصد به کندی و پس از آن با شیب تندتری صورت می‌گیرد. ولی، هنگامی که سختی دورانی پیوند تیر به ستون‌ها یا سختی دورانی پیوند ستون به تکیه‌گاه غیرقطعی پنداشته می‌شوند، شیب افزایش احتمال شکست این قاب، به طور تقریبی خطی می‌باشد.

■ با افزایش ضریب پراکندگی، شیب افزایش احتمال شکست قاب دروازه‌ای منشوری با تصادفی پنداشتن سختی دورانی پیوند تیر به ستون‌ها و سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی تا ۱۵ درصد به تدریج و پس از آن با شیب زیادتری صورت می‌گیرد. ولی، هنگامی که سختی دورانی پیوند ستون به تکیه‌گاه غیرقطعی است، شیب افزایش احتمال شکست این سازه، برای ضریب پراکندگی‌های بیش از ۱۰ درصد، به طور تقریبی خطی خواهد بود.

■ شیب افزایش احتمال شکست قاب دروازه‌ای نامنشوری با افزایش ضریب پراکندگی و تصادفی پنداشتن سختی دورانی پیوند تیرها به ستون‌ها یا سختی دورانی پیوند ستون به تکیه‌گاه تا ۱۰ درصد به کندی و پس از آن با شیب تندتری صورت می‌گیرد. ولی، هنگامی که سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی غیرقطعی پنداشته می‌شود، احتمال شکست قاب و شیب افزایش آن بسیار ناچیز است.

■ برای ضریب پراکندگی‌های بیشتر از ۲۰ درصد، احتمال شکست قاب ساده‌ی منشوری با لگ‌نرمال پنداشتن متغیرهای تصادفی، همواره بیشتر از نرمال در نظر گرفتن آن‌ها خواهد بود. در برابر آن، برای ضریب پراکندگی‌های متفاوت، احتمال شکست قاب‌های دروازه‌ای منشوری و نامنشوری با نرمال پنداشتن متغیرهای تصادفی، همواره بیشتر از لگ‌نرمال در نظر گرفتن آن‌ها می‌باشد.

■ احتمال شکست قاب‌ها به طور نسبی و به ویژه در ضریب پراکندگی‌های کم، مستقل از گونه‌ی تابع توزیع احتمال می‌باشد. این پدیده به آن سبب است که نمودار فراوانی پاسخ سازه‌ها در دو حالت نرمال و لگ‌نرمال همانند یکدیگر خواهد بود.

■ احتمال شکست قاب ساده‌ی منشوری و همچنین، قاب‌های دروازه‌ی منشوری و نامنشوری، نسبت به متغیر سختی دورانی پیوند ستون به تکیه‌گاه در سنجش با دیگر متغیرها از حساسیت بیشتری برخوردار است. ولی در قاب ساده‌ی نامنشوری، احتمال شکست سازه نسبت به متغیر سختی دورانی پیوند تیر به ستون‌ها حساس‌تر می‌باشد.

#### ۷- مراجع

- [1] Haldar, A. and Mahadevan, S. (2000), "Reliability Assessment using Stochastic Finite Element Analysis", New York: John Wiley & Sons.
- [2] Rubinstein, R.Y. and Kroese, D.P. (2008), "Simulation and the Monte Carlo Method", Wiley.
- [3] Gao, L. and Haldar, A. (1995), "Safety Evaluation of Frames with PR Connections", Journal of Structural Engineering, Vol. 121, No. 7, pp. 1101-1109.
- [4] Zhang, J. and Ellingwood, B. (1995), "Effects of Uncertain Material Properties on Structural Stability", Journal of Structural Engineering, Vol. 121, No. 4, pp. 705-716.
- [5] Song, J. and Ellingwood, B. (1999), "Seismic Reliability of Special Moment Steel Frames with Welded Connections: I", Journal of Structural Engineering, Vol. 125, No. 4, pp. 357-371.
- [6] Song, J. and Ellingwood, B. (1999), "Seismic Reliability of Special Moment Steel Frames with Welded Connections: II", Journal of Structural Engineering, Vol. 125, No. 4, pp. 372-384.
- [7] Sakurai, S., Ellingwood, B.R. and Kushiya, S. (2001), "Probabilistic Study of the Behavior of Steel Frames with Partially Restrained Connections", Engineering Structures, Vol. 23, No. 11, pp. 1410-1417.
- [8] Huh, J. and Haldar, A. (2002), "Seismic Reliability of Non-Linear Frames with PR Connections using Systematic RSM", Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 17, No. 2, pp. 177-190.
- [9] Hadianfard, M.A. and Razani, R. (2003), "Effects of Semi-Rigid Behavior of Connections in the Reliability of Steel Frames", Structural Safety, Vol. 25, No. 2, pp. 123-138.



Fields", Civil Engineering Infrastructures Journal, Vol. 45, No. 6, pp. 659-670.

[19] De León, D., Reyes, A. and Yu, C. (2013), "Probabilistic Assessment of Connections for Steel Buildings on Seismic Zones", Journal of Constructional Steel Research, Vol. 88, pp. 15-20.

[20] Shahabian, F., Elachachi, S.M. and Breysse, D. (2013), "Safety Analysis of the Patch Load Resistance of Plate Girders: Influence of Model Error and Variability", Civil Engineering Infrastructures Journal, Vol. 46, No. 2, pp. 145-160.

[21] Razavi, M. and Abolmaali, A. (2014), "Earthquake Resistance Frames with Combination of Rigid and Semi-rigid Connections", Journal of Constructional Steel Research, Vol. 98, pp. 1-11.

[22] Raftoyiannis, I.G. (2005), "The Effect of Semi-Rigid Joints and an Elastic Bracing System on the Buckling Load of Simple Rectangular Steel Frames", Journal of Constructional Steel Research, Vol. 61, No. 9, pp. 1205-1225.

[23] رضایی پزند، م. و بمبائی چی، م. (۱۳۸۸)، "تحلیل کشسان مرتبه دوم و پایداری قاب‌های فولادی با پیوندهای نیمه‌سخت"، نشریه علمی و پژوهشی سازه و فولاد، سال پنجم، شماره ۵۹-۸۱، صفحه ۵۹-۸۱.

[24] Saffari, H., Rahgozar, R. and Jahanshahi, R. (2008), "An Efficient Method for Computation of Effective Length Factor of Columns in a Steel Gabled Frame with Tapered Members", Journal of Constructional Steel Research, Vol. 64, No. 4, pp. 400-406.

[25] Bazeos, N. and Karabalis, D.L. (2006), "Efficient Computation of Buckling Loads for Plane Steel Frames with Tapered Members", Engineering Structures, Vol. 28, No. 5, pp. 771-775.

[26] Tajmir Riahi, H., Shojaei Barjoui, A., Bazazzadeh, S. and Etezady, S.M.A. (2012), "Buckling Analysis of Non-Prismatic Columns using Slope-Deflection Method", Fifteenth world conference on earthquake engineering, Lisbon, Portugal.

[10] Duan, H.J., Zhao, J.C. and Song, Z.S. (2011), "Effects of Initial Imperfection of Bolted End-plate Connections in the Reliability of Steel Portal Frames", Procedia Engineering, Vol. 14, pp. 2164-2171.

[11] Li, J.-J. and Li, G.-Q. (2004), "Reliability-Based Integrated Design of Steel Portal Frames with Tapered Members", Structural Safety, Vol. 26, No. 2, pp. 221-239.

[۱۲] لطف‌اللهی یقین، م.ع. و نگین، م. (۱۳۸۹)، "مطالعه اثر انحنای اولیه تصادفی اعضا بر قابلیت اعتماد قاب‌های فولادی"، مجله علمی و پژوهشی عمران مدرس، دوره ۵، شماره ۴، صفحه ۵۷-۶۹.

[۱۳] رضایی پزند، م.، شهاییان، ف. و بمبائی چی، م. (۱۳۹۰)، "بررسی قابلیت اطمینان پایداری قاب‌های فولادی دو بعدی با پیوندهای نیمه‌سخت و دارای مشخصات غیرقطعی"، ششمین کنگره ملی مهندسی عمران، سمنان.

[14] Kala, Z. (2011), "Sensitivity Analysis of Stability Problems of Steel Plane Frames", Thin-Walled Structures, Vol. 49, No. 5, pp. 645-651.

[۱۵] شایانفر، م.، برخوردار، م.ع. و رحمانیان، م. (۱۳۹۰)، "تحلیل ارزیابی قابلیت اعتماد اعضای طراحی شده بر اساس آیین نامه فولاد ایران"، نشریه علمی و پژوهشی سازه و فولاد، سال هفتم، شماره ۵، صفحه ۵-۱۲.

[۱۶] جی، آ. و ایرانی، ف. (۱۳۹۰)، "تحلیل حساسیت خرابی پیشرونده قاب‌های خمشی فولادی"، نشریه علمی و پژوهشی سازه و فولاد، سال هفتم، شماره ۵، صفحه ۶۱-۷۲.

[17] Jalali, S.A., Banazadeh, M., Abolmaali, A. and Tafakori, E. (2012), "Probabilistic Seismic Demand Assessment of Steel Moment Frames with Side-plate Connections", Scientia Iranica, Vol. 19, No. 1, pp. 27-40.

[18] Shahabian, F. and Alamatian, J. (2012), "Stochastic Nonlinear Dynamic Analysis of Portal Frames in Random

## ۸- پیوست

درایه‌های ماتریس پایداری برای قاب ساده‌ی منشوری به صورت زیر می‌آیند:

$$K_{1,1} = K_{1,3} = K_{3,8} = K_{3,10} = 0 \quad (۱۳)$$

$$K_{1,2} = K_{1,4} = K_{3,9} = K_{3,11} = K_{5,7} = K_{6,3} = K_{6,4} = -K_{6,10} = -K_{6,11} = 1 \quad (۱۴)$$

$$K_{2,1} = \bar{K}_{fl} \rho \quad (۱۵)$$

$$K_{2,2} = -(1 - \bar{K}_{fl}) \rho^2 \quad (۱۶)$$



$$K_{2,3} = \bar{K}_{fL} \quad (17)$$

$$K_{4,8} = \bar{K}_{fR} \rho \quad (18)$$

$$K_{4,9} = -(1 - \bar{K}_{fR}) \rho^2 \quad (19)$$

$$K_{4,10} = \bar{K}_{fR} \quad (20)$$

$$K_{5,5} = (\bar{l} / \bar{\mu})^2 \quad (21)$$

$$6K_{5,6} = 3K_{9,6} = -K_{10,5} = 6\bar{l} / \bar{\mu} \quad (22)$$

$$K_{6,1} = -K_{6,8} = \sin \rho \quad (23)$$

$$K_{6,2} = -K_{6,9} = \cos \rho \quad (24)$$

$$K_{7,3} = -(1 - \bar{K}_b) \rho^2 \quad (25)$$

$$K_{7,8} = \bar{K}_b \sin \rho \quad (26)$$

$$K_{7,9} = \bar{K}_b \cos \rho \quad (27)$$

$$K_{7,10} = \bar{K}_b - (1 - \bar{K}_b) \rho^2 \quad (28)$$

$$K_{7,11} = \bar{K}_b \quad (29)$$

$$K_{8,1} = K_{10,8} = \rho^2 \sin \rho \quad (30)$$

$$K_{8,2} = K_{10,9} = \rho^2 \cos \rho \quad (31)$$

$$K_{8,6} = -K_{10,6} = 2 \quad (32)$$

$$K_{9,1} = \bar{K}_{cL} \rho \cos \rho \quad (33)$$

$$K_{9,2} = -\bar{K}_{cL} \rho \sin \rho \quad (34)$$

$$K_{9,3} = -K_{9,7} = \bar{K}_{cL} \quad (35)$$

$$K_{11,5} = 3\bar{l}^2 (2 - \bar{K}_{cR}) / \bar{\mu}^2 \quad (36)$$

$$K_{11,6} = 2\bar{l} / \bar{\mu} \quad (37)$$

$$K_{11,7} = -K_{11,10} = \bar{K}_{cR} \quad (38)$$

$$K_{11,8} = \bar{K}_{cR} \rho \sin \rho \quad (39)$$



$$K_{11,9} = -\bar{K}_{cR} \rho \cos \rho \quad (40)$$

درایه‌های ماتریس پایداری برای قاب ساده‌ی نامنشوری به قرار زیر هستند:

$$K_{1,1} = K_{3,8} = 0 \quad (41)$$

$$K_{1,2} = K_{1,4} = K_{3,9} = K_{3,11} = K_{5,7} = K_{6,3} = K_{6,4} = -K_{6,10} = -K_{6,11} = 1 \quad (42)$$

$$2K_{1,3} = 2K_{3,10} = K_{8,6} = -K_{10,6} = 2\bar{a} \quad (43)$$

$$K_{2,1} = (1-\bar{a})\bar{K}_{fL} \sqrt{\frac{\bar{a}^2 \rho^2}{(1-\bar{a})^2} - \frac{1}{4}} \quad (44)$$

$$K_{2,2} = -\bar{a}(1-\bar{K}_{fL})\rho^2 + \frac{(1-\bar{a})\bar{K}_{fL}}{2} \quad (45)$$

$$K_{2,3} = \bar{a}(1-\bar{a})\bar{K}_{fL} \quad (46)$$

$$K_{4,8} = (1-\bar{a})\bar{K}_{fR} \sqrt{\frac{\bar{a}^2 \rho^2}{(1-\bar{a})^2} - \frac{1}{4}} \quad (47)$$

$$K_{4,9} = -\bar{a}(1-\bar{K}_{fR})\rho^2 + \frac{(1-\bar{a})\bar{K}_{fR}}{2} \quad (48)$$

$$K_{4,10} = \bar{a}(1-\bar{a})\bar{K}_{fR} \quad (49)$$

$$K_{5,5} = [\bar{l}(1-\bar{a})]^2 / \bar{\mu}^2 \quad (50)$$

$$2K_{5,6} = K_{9,6} = 2\bar{l}(1-\bar{a}) / \bar{\mu} \quad (51)$$

$$K_{6,1} = -K_{6,8} = \sqrt{\frac{1}{\bar{a}}} \sin \left[ \sqrt{\frac{\bar{a}^2 \rho^2}{(1-\bar{a})^2} - \frac{1}{4}} \times \ln \left( \frac{1}{\bar{a}} \right) \right] \quad (52)$$

$$K_{6,2} = -K_{6,9} = \sqrt{\frac{1}{\bar{a}}} \cos \left[ \sqrt{\frac{\bar{a}^2 \rho^2}{(1-\bar{a})^2} - \frac{1}{4}} \times \ln \left( \frac{1}{\bar{a}} \right) \right] \quad (53)$$

$$K_{7,3} = -(1-\bar{a})(1-\bar{K}_b)\rho^2 \quad (54)$$

$$K_{7,8} = \bar{K}_b \sqrt{\frac{1}{\bar{a}}} \sin \left[ \sqrt{\frac{\bar{a}^2 \rho^2}{(1-\bar{a})^2} - \frac{1}{4}} \times \ln \left( \frac{1}{\bar{a}} \right) \right] \quad (55)$$

$$K_{7,9} = \bar{K}_b \sqrt{\frac{1}{a}} \cos \left[ \sqrt{\frac{\bar{a}^2 \rho^2}{(1-a)^2} - \frac{1}{4}} \times \ln \left( \frac{1}{a} \right) \right] \quad (56)$$

$$K_{7,10} = \bar{K}_b - (1-\bar{a})(1-\bar{K}_b)\rho^2 \quad (57)$$

$$K_{7,11} = \bar{K}_b \quad (58)$$

$$K_{8,1} = K_{10,8} = \frac{\bar{a}\rho^2}{(1-\bar{a})^2} \sqrt{\frac{1}{a}} \sin \left[ \sqrt{\frac{\bar{a}^2 \rho^2}{(1-\bar{a})^2} - \frac{1}{4}} \times \ln \left( \frac{1}{a} \right) \right] \quad (59)$$

$$K_{8,2} = K_{10,9} = \frac{\bar{a}\rho^2}{(1-\bar{a})^2} \sqrt{\frac{1}{a}} \cos \left[ \sqrt{\frac{\bar{a}^2 \rho^2}{(1-\bar{a})^2} - \frac{1}{4}} \times \ln \left( \frac{1}{a} \right) \right] \quad (60)$$

$$K_{9,1} = \bar{K}_{cl} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{a}} \sin \left[ \sqrt{\frac{\bar{a}^2 \rho^2}{(1-\bar{a})^2} - \frac{1}{4}} \times \ln \left( \frac{1}{a} \right) \right] + \sqrt{\frac{\bar{a}^2 \rho^2}{(1-\bar{a})^2} - \frac{1}{4}} \times \sqrt{\frac{1}{a}} \cos \left[ \sqrt{\frac{\bar{a}^2 \rho^2}{(1-\bar{a})^2} - \frac{1}{4}} \times \ln \left( \frac{1}{a} \right) \right] \right\} \quad (61)$$

$$K_{9,2} = \bar{K}_{cl} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{a}} \cos \left[ \sqrt{\frac{\bar{a}^2 \rho^2}{(1-\bar{a})^2} - \frac{1}{4}} \times \ln \left( \frac{1}{a} \right) \right] - \sqrt{\frac{\bar{a}^2 \rho^2}{(1-\bar{a})^2} - \frac{1}{4}} \times \sqrt{\frac{1}{a}} \sin \left[ \sqrt{\frac{\bar{a}^2 \rho^2}{(1-\bar{a})^2} - \frac{1}{4}} \times \ln \left( \frac{1}{a} \right) \right] \right\} \quad (62)$$

$$K_{9,3} = -K_{9,7} = \bar{K}_{cl} \quad (63)$$

$$K_{10,5} = -6\bar{l}\bar{a}(1-\bar{a}) / \bar{\mu} \quad (64)$$

$$K_{11,5} = 3 \left[ \bar{l}(1-\bar{a}) \right]^2 (2 - \bar{K}_{cr}) / \bar{\mu}^2 \quad (65)$$

$$K_{11,6} = 2\bar{l}(1-\bar{a}) / \bar{\mu} \quad (66)$$

$$K_{11,7} = -K_{11,10} = \bar{K}_{cr} \quad (67)$$

$$K_{11,8} = -\bar{K}_{cr} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{a}} \sin \left[ \sqrt{\frac{\bar{a}^2 \rho^2}{(1-\bar{a})^2} - \frac{1}{4}} \times \ln \left( \frac{1}{a} \right) \right] + \sqrt{\frac{\bar{a}^2 \rho^2}{(1-\bar{a})^2} - \frac{1}{4}} \times \sqrt{\frac{1}{a}} \cos \left[ \sqrt{\frac{\bar{a}^2 \rho^2}{(1-\bar{a})^2} - \frac{1}{4}} \times \ln \left( \frac{1}{a} \right) \right] \right\} \quad (68)$$

$$K_{11,9} = -\bar{K}_{cr} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{a}} \cos \left[ \sqrt{\frac{\bar{a}^2 \rho^2}{(1-\bar{a})^2} - \frac{1}{4}} \times \ln \left( \frac{1}{a} \right) \right] - \sqrt{\frac{\bar{a}^2 \rho^2}{(1-\bar{a})^2} - \frac{1}{4}} \times \sqrt{\frac{1}{a}} \sin \left[ \sqrt{\frac{\bar{a}^2 \rho^2}{(1-\bar{a})^2} - \frac{1}{4}} \times \ln \left( \frac{1}{a} \right) \right] \right\} \quad (69)$$

درایه‌های ماتریس پایداری برای قاب دروازه‌ای منشوری به صورت زیر می‌آیند:

$$\begin{aligned} K_{1,1} &= K_{1,3} = K_{3,13} = K_{3,15} = K_{5,5} = K_{5,6} = \\ K_{5,7} &= K_{7,9} = K_{7,10} = K_{7,11} = K_{11,8} = K_{13,12} = K_{15,8} = \\ K_{15,12} &= K_{16,5} = K_{16,6} = K_{16,8} = K_{16,9} = K_{16,10} = K_{16,12} = 0 \end{aligned} \quad (70)$$



$$K_{1,2} = K_{1,4} = K_{3,14} = K_{3,16} = K_{9,3} = K_{9,4} = -K_{9,15} = -K_{9,16} = -K_{15,6} = -K_{15,10} = K_{16,7} = -K_{16,11} = 1 \quad (۷۱)$$

$$K_{2,1} = \bar{K}_{fL} \rho \quad (۷۲)$$

$$K_{1,1} = K_{3,8} = K_{2,2} = \rho^2 (1 - \bar{K}_{fL}) \quad (۷۳)$$

$$K_{2,3} = \bar{K}_{fL} \quad (۷۴)$$

$$K_{4,13} = \bar{K}_{fR} \rho \quad (۷۵)$$

$$K_{4,14} = \rho^2 (1 - \bar{K}_{fR}) \quad (۷۶)$$

$$K_{4,15} = \bar{K}_{fR} \quad (۷۷)$$

$$K_{5,1} = K_{6,1} = K_{7,13} = K_{8,13} = -\sin \rho \sin \alpha \quad (۷۸)$$

$$K_{5,2} = K_{6,2} = K_{7,14} = K_{8,14} = -\cos \rho \sin \alpha \quad (۷۹)$$

$$K_{5,3} = K_{5,4} = K_{6,3} = K_{6,4} = K_{7,15} = K_{7,16} = K_{8,15} = K_{8,16} = -\sin \alpha \quad (۸۰)$$

$$K_{5,8} = K_{6,7} = K_{6,8} = K_{7,12} = K_{8,11} = K_{8,12} = \bar{l} \quad (۸۱)$$

$$K_{6,5} = K_{8,10} = \bar{l}^3 \quad (۸۲)$$

$$K_{6,6} = K_{8,11} = \bar{l}^2 \quad (۸۳)$$

$$K_{9,1} = -K_{9,13} = \sin \rho \quad (۸۴)$$

$$K_{9,2} = -K_{9,14} = \cos \rho \quad (۸۵)$$

$$K_{10,3} = -\rho^2 (1 - \bar{K}_b) \quad (۸۶)$$

$$K_{10,13} = \bar{K}_b \sin \rho \quad (۸۷)$$

$$K_{10,14} = \bar{K}_b \cos \rho \quad (۸۸)$$

$$K_{10,15} = \bar{K}_b - \rho^2 (1 - \bar{K}_b) \quad (۸۹)$$

$$K_{10,16} = \bar{K}_b \quad (۹۰)$$

$$K_{11,1} = K_{13,13} = \rho^2 \sin \rho \quad (۹۱)$$

$$K_{11,2} = K_{13,14} = \rho^2 \cos \rho \quad (۹۲)$$

$$K_{11,5} = K_{13,9} = -6\bar{\mu}l \quad (93)$$

$$K_{11,6} = K_{13,10} = -2\bar{\mu} \quad (94)$$

$$K_{12,1} = -\bar{K}_{cL} \cos \rho \quad (95)$$

$$K_{12,2} = \bar{K}_{cL} \sin \rho \quad (96)$$

$$-K_{12,3} = K_{12,7} = \bar{K}_{cL} \quad (97)$$

$$K_{12,5} = 3\bar{l}^2 (2 - \bar{K}_{cL}) \quad (98)$$

$$K_{12,6} = K_{14,10} = 2\bar{l} \quad (99)$$

$$K_{14,9} = 3\bar{l}^2 (2 - \bar{K}_{cR}) \quad (100)$$

$$K_{14,11} = -K_{14,15} = \bar{K}_{cR} \quad (101)$$

$$K_{14,13} = -\bar{K}_{cR} \cos \rho \quad (102)$$

$$K_{14,14} = \bar{K}_{cR} \sin \rho \quad (103)$$

درایه‌های ماتریس پایداری برای قاب دروازه‌ای نامنشوری به قرار زیر هستند:

$$K_{1,1} = K_{3,13} = K_{11,5} = K_{13,9} = K_{14,11} = K_{16,7} = K_{16,11} = 0 \quad (104)$$

$$K_{5,7} = K_{6,7} = K_{7,11} = K_{8,11} = K_{9,3} = K_{9,4} = -K_{9,15} = -K_{9,16} = -K_{15,6} = -K_{15,10} = K_{16,5} = -K_{16,9} = 1 \quad (105)$$

$$K_{1,2} = K_{3,14} = \sqrt{a} \quad (106)$$

$$K_{1,3} = K_{3,15} = \bar{a} \quad (107)$$

$$K_{2,1} = \bar{K}_{fL} \rho (1 - \bar{a}) \sqrt{a} \quad (108)$$

$$K_{2,2} = \left[ \bar{a} \rho^2 (1 - \bar{K}_{fL}) + (1 - \bar{a}) \bar{K}_{fL} / 2 \right] \sqrt{a} \quad (109)$$

$$K_{2,3} = \bar{K}_{fL} \bar{a} (1 - \bar{a}) \quad (110)$$

$$K_{4,13} = \bar{K}_{fR} \rho (1 - \bar{a}) \sqrt{a} \quad (111)$$

$$K_{4,14} = \left[ \bar{a} \rho^2 (1 - \bar{K}_{fR}) + (1 - \bar{a}) \bar{K}_{fR} / 2 \right] \sqrt{a} \quad (112)$$



$$K_{4,15} = \bar{K} \bar{a} (1 - \bar{a}) \quad (113)$$

$$K_{5,1} = K_{6,1} = K_{7,13} = K_{8,13} = -\sin \left[ \sqrt{\left( \frac{\bar{a}\rho}{1-\bar{a}} \right)^2} - \frac{1}{4} \times \ln \left( \frac{1}{\bar{a}} \right) \right] \times \sin \alpha \quad (114)$$

$$K_{5,2} = K_{6,2} = K_{7,14} = K_{8,14} = -\cos \left[ \sqrt{\left( \frac{\bar{a}\rho}{1-\bar{a}} \right)^2} - \frac{1}{4} \times \ln \left( \frac{1}{\bar{a}} \right) \right] \times \sin \alpha \quad (115)$$

$$K_{5,3} = K_{5,4} = K_{6,3} = K_{6,4} = K_{7,15} = K_{7,16} = K_{8,15} = K_{8,16} = -\sin \alpha \quad (116)$$

$$K_{5,5} = K_{7,9} = \bar{b} \quad (117)$$

$$K_{5,6} = K_{7,10} = \bar{b} \ln \bar{b} \quad (118)$$

$$K_{5,8} = K_{7,12} = \ln \bar{b} \quad (119)$$

$$K_{6,5} = K_{8,9} = \bar{g} \quad (120)$$

$$K_{6,6} = K_{8,10} = \bar{g} \ln \bar{g} \quad (121)$$

$$K_{6,8} = K_{8,12} = \ln \bar{g} \quad (122)$$

$$K_{9,1} = -K_{9,13} = \sin \left[ \sqrt{\left( \frac{\bar{a}\rho}{1-\bar{a}} \right)^2} - \frac{1}{4} \times \ln \left( \frac{1}{\bar{a}} \right) \right] \quad (123)$$

$$K_{9,2} = -K_{9,14} = \cos \left[ \sqrt{\left( \frac{\bar{a}\rho}{1-\bar{a}} \right)^2} - \frac{1}{4} \times \ln \left( \frac{1}{\bar{a}} \right) \right] \quad (124)$$

$$K_{10,3} = -\rho^2 (1 - \bar{a}) (1 - \bar{K}_b) \quad (125)$$

$$K_{10,13} = \bar{K}_b \sin \left[ \sqrt{\left( \frac{\bar{a}\rho}{1-\bar{a}} \right)^2} - \frac{1}{4} \times \ln \left( \frac{1}{\bar{a}} \right) \right] \quad (126)$$

$$K_{10,14} = \bar{K}_b \cos \left[ \sqrt{\left( \frac{\bar{a}\rho}{1-\bar{a}} \right)^2} - \frac{1}{4} \times \ln \left( \frac{1}{\bar{a}} \right) \right] \quad (127)$$

$$K_{10,15} = \bar{K}_b - \rho^2 (1 - \bar{a}) (1 - \bar{K}_b) \quad (128)$$

$$K_{10,16} = \bar{K}_b \quad (129)$$

$$K_{11,1} = K_{13,13} = \rho^2 \sin \left[ \sqrt{\left( \frac{\bar{a}\rho}{1-\bar{a}} \right)^2} - \frac{1}{4} \times \ln \left( \frac{1}{\bar{a}} \right) \right] \quad (130)$$

$$K_{11,2} = K_{13,14} = \rho^2 \cos \left[ \sqrt{\left( \frac{\bar{a}\rho}{1-\bar{a}} \right)^2} - \frac{1}{4} \times \ln \left( \frac{1}{\bar{a}} \right) \right] \quad (131)$$

$$K_{11,6} = K_{13,10} = -\bar{\mu}\bar{g}(1-\bar{a})^2 / \bar{b}^2 \quad (132)$$

$$K_{11,8} = K_{13,12} = \bar{\mu}(1-\bar{a})^2 / \bar{b}^2 \quad (133)$$

$$K_{12,1} = -\bar{K}_{cL} \left\{ \frac{\sin \left[ \sqrt{\left( \frac{\bar{a}\rho}{1-\bar{a}} \right)^2} - \frac{1}{4} \times \ln \left( \frac{1}{\bar{a}} \right) \right]}{2} + \frac{\bar{a}\rho}{1-\bar{a}} \times \cos \left[ \sqrt{\left( \frac{\bar{a}\rho}{1-\bar{a}} \right)^2} - \frac{1}{4} \times \ln \left( \frac{1}{\bar{a}} \right) \right] \right\} \quad (134)$$

$$K_{12,2} = \bar{K}_{cL} \left\{ -\frac{\cos \left[ \sqrt{\left( \frac{\bar{a}\rho}{1-\bar{a}} \right)^2} - \frac{1}{4} \times \ln \left( \frac{1}{\bar{a}} \right) \right]}{2} + \frac{\bar{a}\rho}{1-\bar{a}} \times \sin \left[ \sqrt{\left( \frac{\bar{a}\rho}{1-\bar{a}} \right)^2} - \frac{1}{4} \times \ln \left( \frac{1}{\bar{a}} \right) \right] \right\} \quad (135)$$

$$-K_{12,3} = K_{12,5} = \bar{K}_{cL} \quad (136)$$

$$K_{12,6} = \bar{K}_{cL} \left[ 1 + \ln \bar{g} + \left( \frac{\bar{g}}{\bar{b}} \right) \left( 1 - \frac{\bar{g}}{\bar{b}} \right) \right] - \left( \frac{\bar{g}}{\bar{b}} \right) \left( 1 - \frac{\bar{g}}{\bar{b}} \right) \quad (137)$$

$$K_{12,8} = \bar{K}_{cL} \left[ \left( \frac{1}{\bar{g}} \right) - \left( \frac{1}{\bar{b}} \right) \left( 1 - \frac{\bar{g}}{\bar{b}} \right) \right] + \left( \frac{1}{\bar{b}} \right) \left( 1 - \frac{\bar{g}}{\bar{b}} \right) \quad (138)$$

$$K_{14,9} = -K_{14,15} = \bar{K}_{cR} \quad (139)$$

$$K_{14,10} = \bar{K}_{cR} \left[ 1 + \ln \bar{g} + \left( \frac{\bar{g}}{\bar{b}} \right) \left( 1 - \frac{\bar{g}}{\bar{b}} \right) \right] - \left( \frac{\bar{g}}{\bar{b}} \right) \left( 1 - \frac{\bar{g}}{\bar{b}} \right) \quad (140)$$

$$K_{14,12} = \bar{K}_{cR} \left[ \left( \frac{1}{\bar{g}} \right) - \left( \frac{1}{\bar{b}} \right) \left( 1 - \frac{\bar{g}}{\bar{b}} \right) \right] + \left( \frac{1}{\bar{b}} \right) \left( 1 - \frac{\bar{g}}{\bar{b}} \right) \quad (141)$$



$$K_{14,13} = -\bar{K}_{cR} \left\{ \frac{\sin \left[ \sqrt{\left( \frac{\bar{a}\rho}{1-a} \right)^2} - \frac{1}{4} \times \ln \left( \frac{1}{a} \right) \right]}{2} + \frac{\bar{a}\rho}{1-a} \times \cos \left[ \sqrt{\left( \frac{\bar{a}\rho}{1-a} \right)^2} - \frac{1}{4} \times \ln \left( \frac{1}{a} \right) \right] \right\} \quad (142)$$

$$K_{14,14} = \bar{K}_{cR} \left\{ -\frac{\cos \left[ \sqrt{\left( \frac{\bar{a}\rho}{1-a} \right)^2} - \frac{1}{4} \times \ln \left( \frac{1}{a} \right) \right]}{2} + \frac{\bar{a}\rho}{1-a} \times \sin \left[ \sqrt{\left( \frac{\bar{a}\rho}{1-a} \right)^2} - \frac{1}{4} \times \ln \left( \frac{1}{a} \right) \right] \right\} \quad (143)$$

$$K_{15,8} = K_{15,12} = K_{16,8} = -K_{16,12} = -1/\bar{b} \quad (144)$$

$$K_{16,6} = -K_{16,10} = 1 + \ln \bar{b} \quad (145)$$

در این رابطه‌ها از عامل‌های زیر بهره‌جویی شده است:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= Pl_c^2 / EI_c, \quad \bar{\mu} = I_b / I_c, \quad \bar{l} = l_b / l_c, \quad \bar{a} = a / h, \quad \bar{b} = b / h, \quad \bar{g} = g / h, \\ \bar{K}_{cL} &= 1 / (1 + EI_b / K_{cL} l_b), \quad \bar{K}_{cR} = 1 / (1 + EI_b / K_{cR} l_b), \\ \bar{K}_{fL} &= 1 / (1 + EI_c / K_{fL} l_c), \quad \bar{K}_{fR} = 1 / (1 + EI_c / K_{fR} l_c), \\ \bar{K}_b &= 1 / (1 + EI_c / K_b l_c^3) \end{aligned} \quad (146)$$