



قابلیت اطمینان ستون‌های فولادی با مقطع متغیر پیوسته به روش شبیه‌سازی زیر مجموعه

محمد قانونی بقا^{۱*}، محسنعلی شایانفر^۲، معین برخورداری مهنی^۳، یاسر سعیدپور^۴

۱- استادیار، مهندسی عمران، واحد تهران شرق، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران

۲- دانشیار، مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران، قطب علمی پژوهش‌های بنیادین در مهندسی سازه، تهران

۳- استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه جیرفت، جیرفت

۴- کارشناس ارشد، مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

* تهران، صندوق پستی ۱۳۶-۱۸۷۳۵، ghanooni-bagha@iauet.ac.ir

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۱۰/۱۰، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۰/۲۶)

چکیده

انتخاب ضریب اطمینان مناسب با توجه به احتمال خرابی براساس اهمیت و اقتصاد پروژه یک مسئله آماری است و از قضاوت‌های مهم مهندسی می‌باشد. ضرایب اطمینان مورد استفاده در آیین‌نامه‌ها که بیشتر متکی بر تجربه و قضاوت‌های مهندسی و کارهای آزمایشگاهی می‌باشد، به دلایل گوناگون برای انواع حالت‌ها یکسان تعریف می‌شوند. امروزه بهره‌گیری از روش‌های احتمالاتی بیشتر مورد توجه قرار گرفته و به صورت یک روش عملی برای تحلیل مسائل سازه‌ای درآمده است. در این مقاله با بهره‌گیری از روش نمونه‌گیری شبیه‌سازی زیر مجموعه که روشی بسیار سریع و کارآمد در مقایسه با روش متداول شبیه‌سازی مونت کارلومی باشد، به بررسی احتمال خرابی یک المان متداول با تغییرات خطی مقطع در سه حالت متفاوت پرداخته می‌شود. بر همین اساس تأثیر هر یک از کمیت‌های مؤثر بر کماتش، روی احتمال خرابی ستون‌های با مقطع متغیر در نرم‌افزار متلب بررسی شد. نتایج بدست آمده نشان دهنده حساسیت احتمال خرابی محاسبه شده و ضریب اطمینان مناسب در این گونه اعضا به میزان ضریب تغییرات طول و مدول الاستیسیته ستون می‌باشد.

واژگان کلیدی

مقاطع متغیر، بار بحرانی ستون، قابلیت اطمینان، شبیه‌سازی مونت کارلو، شبیه‌سازی زیر مجموعه‌ای

Reliability Analysis of Steel Columns with Continuous Variable Section via Subset Simulation Method

M. Ghanooni-Bagha, M.A. Shayanfar, M. Barkhori-Mehani, Y. Saeed-Pour

Abstract

Structural Stability is always complex problems in structural design. Select an appropriate safety factor considering the logical failure probability based on the importance and project economics is a statistical issue and related to the engineering judgments. Safety factor that definition in regulations, relies more on experience and engineering judgments and laboratory work, that for various reasons for most same type of element are defined the same. Members buckling problem with variable section is very difficult find accurate solutions to it. In this paper using the subset simulation which is a very fast and efficient compared with the conventional Monte Carlo simulation method, the probability of failure of a common element with linear change in cross-section will be discussed in three different cases. Accordingly, effect of each the affecting parameters on buckling of column with variable section on the probability of failure was investigated in MATLAB software. The analysis results showed that the sensitivity of the calculated failure probability in such member to the amount of coefficient of variations of length and modulus of elasticity of the column.

Keywords

Continuous variable sections, Critical load, Reliability analysis, Monte Carlo simulation, Subset simulation



ایمنی سازه‌ها مهم‌ترین عامل طراحی است. مهم‌ترین عامل خرابی و به خطر افتادن ایمنی ستون‌ها، کماتش ستون‌ها تحت بارهای فشاری است [۱ و ۲]. تحقیقات اولیه در زمینه کماتش بر روی ستون‌های ساده یکنواخت تحت بار متمرکز و یا تحت وزن خود با ارائه حل بسته معادلات آن توسط محققان زیادی همچون اوپلر، گرینهل، مورلی، دینیک و تیموشینکو صورت گرفته است [۳-۵].

برای بیشتر پروژه‌ها و سازه‌ها اقتصاد پروژه نیازمند استفاده از اعضای استاندارد است. زیرا شرایط دسترسی به آنها آسانتر بوده و نسبت به اعضای خاص ارزانتر است اما در بسیاری از پروژه‌ها نیاز به اعضا با مقطع متغیر دارند تا هم مقاومت و ایمنی کار را تضمین کنند و هم مسائل اقتصادی رعایت شود. برای پروژه‌های کوچک شاید این صرفه‌جویی به چشم نیاید اما در پروژه‌های بزرگ و پیچیده و شاید منحصر به فرد این کار مزایای فراوانی خواهد داشت چرا که باعث کاهش مواد مصرفی و عملکرد مطلوب‌تر سازه می‌شود [۵ و ۶]. حل‌های دقیق برای کماتش ستون‌های پلکانی برای اولین بار در سال ۱۹۶۲ توسط گره بدست آمد [۷]. Frisch-Fay در سال ۱۹۶۶ حل تحلیلی برای نیروی بحرانی کماتش یک المان منشوری با نیروی محوری یکنواخت تحت شرایط مرزی مختلف بدست آورد [۸]. Orouke و Zebrowski در سال ۱۹۷۷ نیروی بحرانی تقریبی را برای ستون‌های غیر منشوری بر اساس روش تفاوت محدود FDM بدست آوردند [۹]. در سال ۱۹۸۰ Iromenger از همین روش برای تعیین نیروی کماتش ستون‌های مخروطی و تکه‌ای استفاده کرد [۱۰]. Smith در سال ۱۹۸۸ از روش انرژی برای حل تحلیلی ستون‌های مخروطی استفاده کرد [۱۱]. Ermopoulos در سال ۱۹۷۷ بر اساس روش شیب افت طول موثر کماتش تیرهای غیر منشوری را منتشر کرد [۱۲]. مسئله کماتش الاستیک با تغییرات ضخامت ستون در طول توسط Arbabi در سال ۱۹۹۱ ارائه شد [۱۳]. Siginer در سال ۱۹۹۲ کماتش ستون‌ها را با تغییرات خطی سختی خمشی در طول مورد بررسی قرار داد [۱۴]. در سال ۱۹۹۸ Sampaio و Hundausen با استفاده از روش انرژی توانستند حل دقیقی برای کماتش تیر-ستون‌های کج ارائه دهند [۱۵]. در سال ۱۹۹۹ Elishakoff حل بسته تیرهای غیر منشوری را با استفاده از پخش لنگر بسط داد [۱۶]. Lee و همکارانش در سال ۲۰۰۶ نیروی بحرانی کماتش ستون با مقطع متغیر درجه ۲ سهمی و سینوسی

را بدست آوردند [۱۷]. Rahai و Kazemi در سال ۲۰۰۸ از روش انرژی برای تعیین نیروی بحرانی کماتش در مودهای مختلف در ستون‌ها با تغییر مقطع پلکانی استفاده کردند [۱۸]. در سال ۲۰۱۲ Konstantakopoulos و همکارانش برای کماتش مقاطع متغیر اعضای فولادی رویکردی جدید با استفاده از روش‌های عددی ارائه کردند [۱۹]. در سال‌های اخیر با پیشرفت استفاده از کاربرد تحلیل قابلیت اعتماد در مهندسی سازه‌ها، تحلیل بار کماتشی اعضای با مقطع متغیر با فرمول بسته، با استفاده از روش‌های قابلیت اعتماد مورد توجه قرار گرفت [۲۰]. در سال ۲۰۱۳ Elishakoff و Archaud با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو به بررسی قابلیت اطمینان کماتش اعضای متغیر غیر منشوری پرداختند [۲۱].

بررسی پایداری از مسائل پیچیده در طراحی است که در راستایی حل آن تلاش‌های زیادی توسط محققین انجام شده است. اما بررسی احتمالاتی این موضوع و بررسی اثرات پارامترهای موثر در احتمال خرابی در سالهای اخیر کمتر مورد توجه قرار گرفته است. به همین دلیل، در این مقاله به بررسی احتمال خرابی یک ستون متداول با تغییرات خطی مقطع پرداخته می‌شود. به این منظور قابلیت اعتماد سه مثال عددی با معرفی کمیت‌های دارای عدم قطعیت، با روش‌های تحلیل مونت کارلو و شبیه‌سازی زیر مجموعه در نرم‌افزار متلب مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲- معادلات حاکم

اشاره به ممان اینرسی عضوی با تغییرات پیوسته در مقطع که یک سر آن گیردار و سر دیگر آن آزاد است (شکل (۱))، را می‌توان به صورت رابطه (۱) در مقطع mn به فاصله x از نقطه ثابت O نوشت:

$$I_x = I_1 \left(\frac{x}{a} \right)^n \quad (1)$$

که در آن I_1 ممان اینرسی مقطع کوچکتر است و n ضریب شکل مقطع است که وابسته به شکل و ابعاد مقطع ستون می‌باشد. هنگامی که $n=1$ باشد مقطع عضو به شکل صفحه‌ای با ضخامت ثابت t و وقتی $n=2$ ستونی مرکب را که از چهار زاویه متصل به شکل اریب تشکیل شده نشان می‌دهد. و با در نظر گرفتن $n=4$ ، مواردی مانند هرم یا مخروط کوتاه فضایی را به دست می‌آوریم.



نمی‌باشد [۲۲]. خرابی هنگامی رخ می‌دهد که حالت حدی $g(X) \leq 0$ باشد و احتمال خرابی برابر است با:

$$P_f = P[g(X) \leq 0] = \int_{g(X) \leq 0} f_X(x) dx \quad (۴)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$P_f = \int \int I[X] f_X(x) dx \quad (۵)$$

$I[X]$ یک تابع نشانگر می‌باشد که مقدار آن در صورتی که $g(X)$ کمتر از صفر گردد برابر یک می‌باشد و در صورتی که $g(X)$ بزرگتر از صفر گردد برابر صفر می‌باشد. همان گونه که مشاهده می‌گردد امید متغیر تصادفی نشانگر برای پیشامد خرابی، تنها برابر احتمال رخداد آن خرابی می‌باشد. بنابراین:

$$P_f = P[g(X) \leq 0] = E[I(X)] = \mu_I = \mu_{P_f} \quad (۶)$$

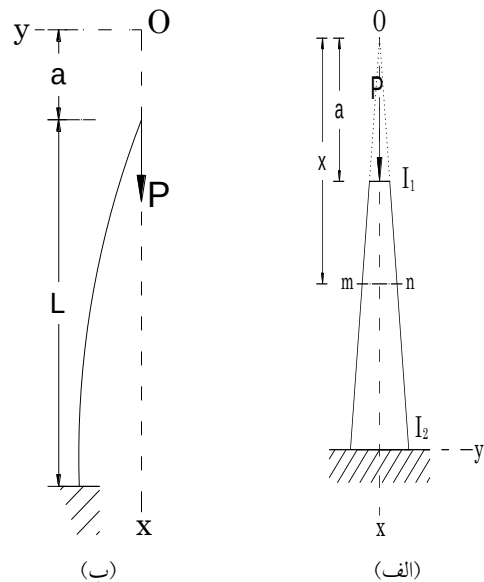
و مقدار واریانس آن برابر است با:

$$\begin{aligned} \text{Var}[I(X)] &= E[I(X)^2] - \{E[I(X)]\}^2 \\ &= E[I(X)] - \{E[I(X)]\}^2 \\ &= E[I(X)]\{1 - E[I(X)]\} = P_f(1 - P_f) \end{aligned} \quad (۷)$$

به منظور محاسبه احتمال خرابی، P_f ، با بهره‌گیری از روش مونت کارلو، باید یک مقدار تصادفی برای هر متغیر تصادفی X_i تولید شود. جهت بدست آوردن عدد تصادفی، روش تبدیل معکوس می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد به این ترتیب که برای هر متغیر ابتدا یک عدد تصادفی با توزیع یکنواخت u_i ($0 \leq u_i \leq 1$) تولید گردیده و برابر تابع توزیع تجمعی $F_X(x_i)$ قرار گیرد. سپس با برابر قرار دادن توابع توزیع تجمعی عدد یکنواخت تولید شده (بین ۰ و ۱) با تابع توزیع تجمعی توزیع واقعی پارامتر (متغیر تصادفی)، مقدار متغیر تصادفی مورد نظر مطابق با فرمول $x_i = F_X^{-1}(u_i)$ تولید می‌شود [۲۲]. وقتی تمام اعداد تصادفی $x_1, x_2, \dots, x_n$ از تابع توزیع تجمعی واقعی همان متغیر، $F_X(x_i)$ استخراج شدند، تخمین احتمال خرابی به کمک رابطه‌ی زیر انجام می‌پذیرد:

$$P_f = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(x_i) \quad (۸)$$

به طوری که P_f مبین مقدار تخمین زده شده‌ی μ_{P_f} بر اساس روش مونت کارلو می‌باشد و n مبین تعداد عددهای تصادفی مستقل می‌باشد. علیرغم اینکه روش مونت کارلو، به عنوان یک روش پایه‌ای و مبنای مقایسه‌ها و محاسبات در نظر گرفته می‌شود، اما از آنجا که این روش برای محاسبه احتمالات کوچک نیاز به تعداد بسیار زیاد شبیه‌سازی دارد، در این موارد بسیار زمان‌بر و ناکارآمد است. به همین دلیل در این تحقیق برای امکان محاسبه احتمالات کوچک و سرعت تحلیل بالاتر



شکل ۱- المان با تغییرات پیوسته در مقطع- یک سر گیردار و سر دیگر آزاد

با توجه به انحنای تغییر شکل عضو مورد نظر مطابق شکل (۱-ب)، معادله دیفرانسیل آن به صورت رابطه (۲) تعریف می‌شود:

$$EI_1 \left(\frac{x}{a}\right)^n \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py \quad (۲)$$

این معادله با عبارات تابع‌های بسل برای هر مقدار n قابل حل است.

۳- احتمال خرابی

عملکرد هر سازه می‌تواند توسط تابعی از متغیرهای تصادفی اصلی از سازه، به نام تابع حالت حدی بیان شود [۲۲]. به طوری که مقدار مثبت تابع حالت حدی بیانگر ایمنی و مقدار منفی تابع حالت حدی بیانگر گسیختگی می‌باشد. ارزیابی احتمال گسیختگی، مسئله‌ای اساسی در تحلیل قابلیت اعتماد سازه‌ای می‌باشد. احتمال گسیختگی می‌تواند به صورت زیر فرمول‌بندی شود:

$$P_f = P(G(X) \leq 0) = \int_{G(X) \leq 0} f(X) f_X \quad (۳)$$

به طوری که X برداری از متغیرهای تصادفی مسئله قابلیت اعتماد را بیان می‌کند، $f(X)$ بیانگر تابع چگالی احتمال مشترک در فضای اصلی مسئله می‌باشد. رابطه‌ی (۳) بیانگر ساده‌ترین رویکرد به منظور حل مسائل قابلیت اطمینان می‌باشد. اگر چه این رابطه ممکن است بسیار پرکاربرد باشد، با این حال از بهره‌وری بالایی به ویژه در تحلیل سیستم‌های پیچیده برخوردار

$$\phi_6 = \left[\left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 + \left(\frac{1}{\ln \frac{v_2}{v_1}} \right)^2 \right] \left(1 - \frac{v_2}{v_1} \right)^2 \quad (14)$$

$$P_k = \phi_6 \cdot \pi^2 \frac{EI_2}{l^2} \quad (15)$$

که در رابطه (۱۰) مقادیر v_1 و v_2 برابرند با:

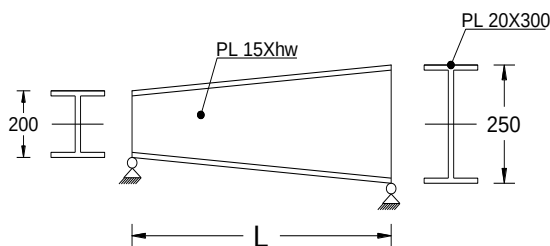
$$v_1 = \sqrt{\frac{P}{EI_1}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{P}{EI_2}} \quad (16)$$

با توجه به روابط محاسبه شده تابع حالت حدی مطابق توضیحات ارائه شده به صورت زیر نوشته می شود.

$$g(x) = P - \lambda P_{cr} \quad (17)$$

که در رابطه (۱۷)، $g(x)$ تابع خرابی و λ را بر اساس سطوح مختلف نیرو با مقادیر ۰/۹، ۰/۸، ۰/۷، ۰/۶، ...، ۰/۳ در نظر گرفته شده است. واضح است در هر مثال با کاهش میزان λ (ضریب بار) میزان ضریب اطمینان سازه بالا می رود. انتخاب یک ایمنی مناسب در طراحی، ترکیبی از تولید سازه ایمن و اقتصاد است، بدین معنی نمی توان چنان ضریب ایمنی برای سازه انتخاب نمود که احتمال خرابی آن صفر درصد باشد.

در این مثال ها با توجه به شکل (۳) مقطع کوچک تر ثابت و مقطع بزرگ تر با افزایش ارتفاع جان در هر مثال افزایش می یابد. ارتفاع جان مقطع کوچک برابر ۲۰۰ میلیمتر در نظر گرفته شده است و مقطع بزرگ تر در این مثال ها دارای ارتفاع هایی برابر ۲۵۰، ۳۰۰، ۳۵۰ میلیمتر می باشد. عرض بال در هر دو مقطع برابر ۳۰۰ میلیمتر و ضخامت بال و جان نیز به ترتیب برابر ۲۰ و ۱۵ میلیمتر انتخاب شده اند. در هر سری مثال طول المان ثابت و در سه سری با طول های ۳، ۴ و ۵ متر بررسی شدند که مشاهده گردید تغییر طول مقاطع تأثیری بر نتایج نداشته همان نتایج قبلی را می دهند در نتیجه فقط نتایج مقطع با طول ۳ متر ذکر شده است. احتمالات خرابی برای $l < 0/8$ به روش نمونه گیری زیر مجموعه ای محاسبه شده اند.



شکل ۳- عضو با مقطع متغیر پیوسته به ارتفاع جان ۲۵۰ میلیمتر

در مثال اول با توجه به شکل (۳) یک ستون دارای مقطع I

در مثال های مختلف که هریک شامل تعداد تحلیل های متعددی هستند، از روش شبیه سازی زیر مجموعه ای [۲۳] استفاده می شود. این روش مبتنی بر محاسبه احتمالات کوچک به صورت حاصل ضرب چندین احتمال شرطی بزرگ می باشد. برای روشن تر شدن مطلب مجموعه های زیر را در نظر می گیریم.

$$S_i = \{X | G(X) \leq b_i\} \quad (9)$$

$$b_n = 0 < b_{n-1}, \dots, < b_1$$

واضح است که S_n ناحیه خرابی مورد نظر بوده و رابطه زیر نیز برقرار است.

$$S_n \subset S_{n-1} \subset \dots \subset S_1 \quad (10)$$

بنابراین احتمال متناظر با رویداد S_i یا $P(S_i)$ را می توان به صورت زیر نوشت.

$$P(S_i) = P(S_{i-1})P(S_i | S_{i-1}) \quad (11)$$

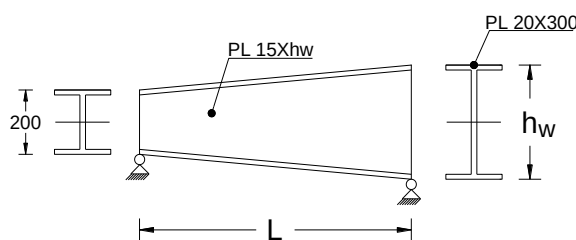
با استقرا می توان احتمال خرابی یا $P(S_n)$ را به صورت زیر نوشت.

$$P(S_n) = P(S_1) \prod_{i=2}^n P(S_i | S_{i-1}) \quad (12)$$

معمولاً مقدارهای آستانه ای b_i طوری انتخاب می شوند که احتمالات شرطی واسط $P=0/1$ شوند.

۴- آنالیز عددی

عضو شکل (۲) را در نظر بگیرید این ستون دارای مقطع I شکل و دارای تغییرات خطی از ابتدا تا انتهاست بطوری که ارتفاع جان به صورت خطی افزایش می یابد. این ستون در دو انتها به صورت مفصلی است.



شکل ۲- عضو با مقطع متغیر پیوسته

مطابق با فرمول های موجود نیروی کمانشی این المان ها از رابطه زیر بدست می آید [۲۴].

$$P_k = \left[\left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 + \left(\frac{1}{\ln \frac{v_2}{v_1}} \right)^2 \right] \left(1 - \frac{v_2}{v_1} \right)^2 \cdot \pi^2 \frac{EI_2}{l^2} \quad (13)$$

که با تعریف رابطه (۱۴) داریم:

شکل و با تغییرات خطی از ابتدا تا انتها در نظر گرفته شده است بطوری که ارتفاع جان به صورت خطی افزایش می یابد. این ستون در دو انتها به صورت مفصلی است. در مقطع کوچکتر ارتفاع و ضخامت جان به ترتیب برابر ۲۰۰ و ۱۵ میلیمتر و در مقطع بزرگتر ارتفاع و ضخامت جان به ترتیب برابر ۲۵۰ و ۱۵ میلیمتر می باشد. عرض بال در هر دو مقطع برابر ۳۰۰ میلیمتر و ضخامت بال برابر ۲۰ میلیمتر انتخاب شده است. این مثال در چهار حالت مختلف با در نظر گرفتن پارامترهای مدول الاستیسیته، طول و ممان اینرسی ها دو سر مقطع به صورت پارامترهای احتمالاتی در ضریب تغییرات ۰/۰۵، ۰/۱، ۰/۱۵ و ۰/۲ در سطوح مختلف نیرو از بار برابر با بار بحرانی ستون تا باری برابر ۰/۳ بار بحرانی ستون، احتمال خرابی و اثر هر پارامتر در میزان خرابی محاسبه و بررسی شده است. برای محاسبه بار بحرانی در مثال از رابطه (۹) استفاده شده است. در جدول (۱) مقادیر هر یک از داده ها و پارامترهای احتمالاتی مثال نشان داده شده است.

جدول ۱- مقادیر و پارامترهای ورودی مثال اول

پارامترهای احتمالاتی	معرف	μ	σ
X_1	E	$2/1 \times 10^4$	$0/05 \mu$
X_2	I_1	۱۰۲۷۲	$0/05 \mu$
X_3	I_2	$17067/6$	$0/05 \mu$
X_4	L	۳۰۰	$0/05 \mu$

برای هریک هر پارامترهای احتمالاتی مفروض آنالیز با تغییر ضریب تغییرات از ۰/۰۵ به ۰/۱ و ۰/۱۵ و ۰/۲ در سطوح مختلف نیرو از بار برابر با بار بحرانی ستون تا بار برابر ۰/۳ بار بحرانی ستون انجام می گیرد. ابتدا برای اولین پارامتر احتمالاتی، مدول الاستیسیته ابتدا از روش شبیه سازی مونت کارلو (جدول (۲)) و سپس از روش شبیه سازی زیرمجموعه (جدول (۳)) آنالیز احتمالاتی صورت گرفته است، مقادیر پارامترهای دیگر برابر جدول (۱) می باشد.

از مقایسه دو جدول (۲) و (۳) مشخص است که روش شبیه سازی زیرمجموعه ای دقت بسیار بالاتری نسبت به روش مونت کارلو و زمان حل بسیار کمتری نسبت به مونت کارلو دارد در نتیجه روش مونت کارلو کنار گذاشته شده و در ادامه نتایج آنالیزها تنها به روش نمونه گیری زیر مجموعه ای ذکر می گردد. در نمودار شکل (۴) اثر ضریب تغییرات مدول الاستیسیته برای لاندهای متفاوت به روش شبیه سازی زیرمجموعه ای رسم شده است. مطابق شکل (۴)، مقدار احتمال خرابی برای ضریب

تغییرات ۰/۰۵، ۰/۱، ۰/۱۵ و ۰/۲ مدول الاستیسیته ستون در مقدار λ (که عکس آن معادل ضریب اطمینان مناسب می باشد) برابر ۰/۷، ۰/۶، ۰/۵ و ۰/۴ نزدیک به صفر (تقریباً 10^{-3}) خواهند بود.

جدول ۲- محاسبه احتمال خرابی در سطوح مختلف نیرو و کماتشی و مشاهده تأثیر پارامتر E (مثال اول) به روش مونت کارلو

COV.E	۰/۰۵	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲
λ	P_f	P_f	P_f	P_f
۱	۰/۵۰۵	۰/۴۰۷	۰/۵۰۷	۰/۵۰۶
۰/۹	۰/۱۸۵	۰/۲۴۲	۰/۱۲۷	۰/۳۳۱
۰/۸	۰/۰۲۶	۰/۰۶۸	۰/۱۲۷	۰/۱۸۲
۰/۷	$5/75 \times 10^{-1}$	$9/40 \times 10^{-3}$	۰/۰۳۸	$8/22 \times 10^{-2}$
۰/۶	۰	$4/99 \times 10^{-4}$	$7/60 \times 10^{-3}$	$2/94 \times 10^{-2}$
۰/۵	۰	$5/80 \times 10^{-6}$	$9/05 \times 10^{-4}$	$8/20 \times 10^{-3}$
۰/۴	۰	۰	$6/70 \times 10^{-5}$	$1/70 \times 10^{-3}$
۰/۳	۰	۰	$2/50 \times 10^{-6}$	$2/74 \times 10^{-4}$

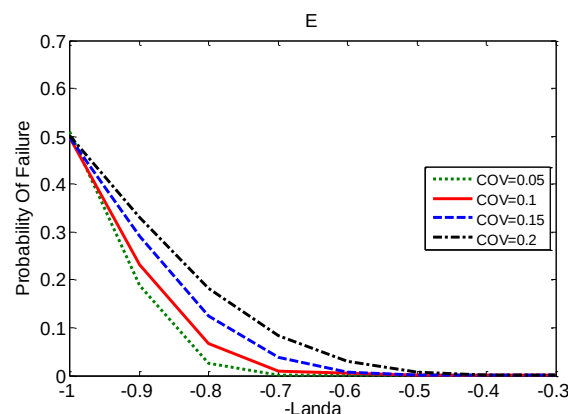
جدول ۳- محاسبه احتمال خرابی در سطوح مختلف نیرو و کماتشی و مشاهده تأثیر پارامتر E (مثال اول) به روش نمونه گیری زیر مجموعه

COV.E	۰/۰۵	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲
λ	P_f	P_f	P_f	P_f
۱	۰/۵۱	۰/۴۹۷	۰/۴۹۸	۰/۵۰۱
۰/۹	۰/۱۸۹	۰/۲۳۱	۰/۲۹۷	۰/۳۳۰
۰/۸	۰/۰۲۵	۰/۰۶۷	۰/۱۲۴	۰/۱۸۲
۰/۷	$8/98 \times 10^{-4}$	$9/70 \times 10^{-3}$	$3/74 \times 10^{-2}$	$8/42 \times 10^{-2}$
۰/۶	$2/70 \times 10^{-6}$	$4/70 \times 10^{-3}$	$7/42 \times 10^{-3}$	$3/04 \times 10^{-2}$
۰/۵	$2/49 \times 10^{-10}$	$5/55 \times 10^{-6}$	$6/98 \times 10^{-4}$	$7/95 \times 10^{-3}$
۰/۴	$2/21 \times 10^{-17}$	$2/45 \times 10^{-8}$	$5/32 \times 10^{-5}$	$1/70 \times 10^{-3}$
۰/۳	$1/79 \times 10^{-38}$	$5/34 \times 10^{-12}$	$3/54 \times 10^{-6}$	$2/18 \times 10^{-4}$

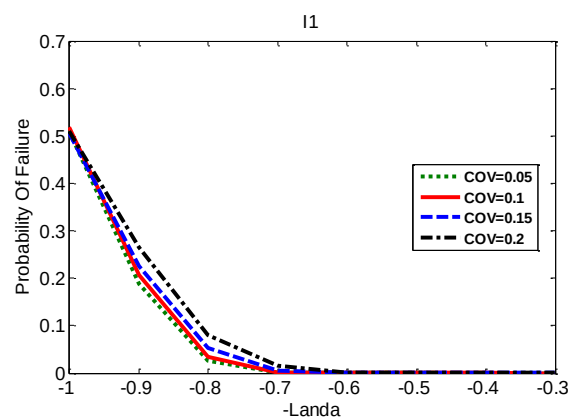
نمودار شکل (۵) تأثیر میزان ممان اینرسی مقطع کوچکتر با تغییر ضریب تغییرات از ۰/۰۵ به ۰/۱ و ۰/۱۵ و ۰/۲ در سطوح مختلف لاندا نمایش داده شده است. مقادیر پارامترهای دیگر در جدول (۱) ارائه شده است. مطابق شکل (۵)، احتمال خرابی برای ضریب تغییرات متفاوت، به هم نزدیک می باشد. نمودار شکل (۶) احتمال خرابی و تأثیر میزان ضریب تغییرات ممان اینرسی مقطع بزرگتر با تغییر ضریب تغییرات از ۰/۰۵ به ۰/۱ و ۰/۱۵ و ۰/۲ در سطوح مختلف نیرو از بار برابر با بار بحرانی ستون تا بار برابر ۰/۳ بار بحرانی را نشان می دهد.



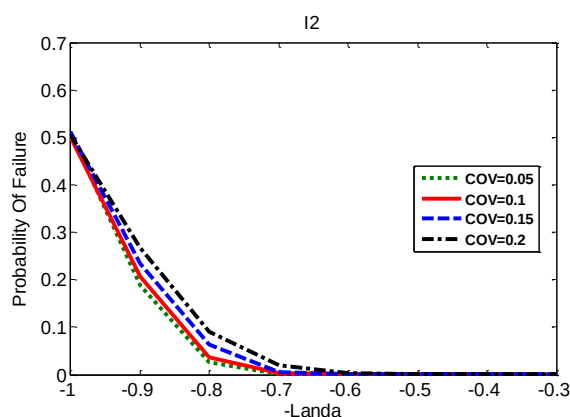
از مقایسه نمودار شکل‌های (۵) و (۶) بیانگر آنست که ممان اینرسی مقطع بزرگتر نسبت به افزایش ضریب تغییرات حساس‌تر بوده و احتمال خرابی بیشتری می‌دهد.



شکل ۴- نمودار احتمال خرابی در سطوح مختلف نیرو کمناشی و تأثیر پارامتر E (برای شکل (۳))

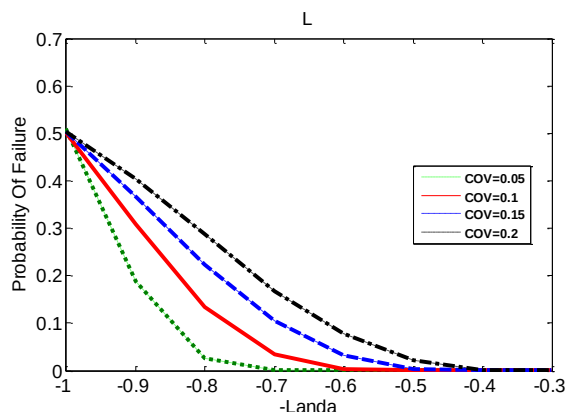


شکل ۵- احتمال خرابی در سطوح مختلف نیرو کمناشی و تأثیر پارامتر $I1$ (برای شکل (۳))



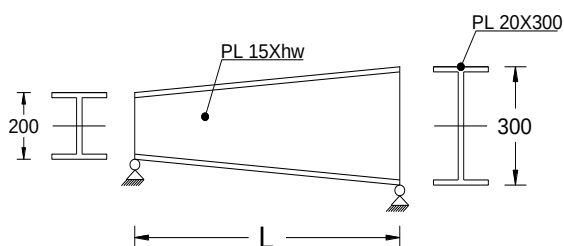
شکل ۶- احتمال خرابی در سطوح مختلف نیرو کمناشی و تأثیر پارامتر $I2$ (برای شکل (۳))

نمودار شکل (۷) احتمال خرابی و تأثیر میزان ضریب تغییرات طول ستون با تغییر ضریب تغییرات از ۰/۰۵ به ۰/۱ و ۰/۱۵ و ۰/۲ در سطوح مختلف نشان می‌دهد. نمودار شکل (۷) نشان می‌دهد که ضریب تغییرات طول نقش به سزایی در افزایش احتمال خرابی دارد. توجه به این نکته ضروری است که تأثیر ضریب تغییرات طول بر احتمال خرابی بسیار زیاد است، اما تغییر طول مقاطع تأثیری بر نتایج ندارد که البته به علت جلوگیری از محاسبات تکراری، فقط نتایج مقطع با طول ۳ متر در این تحقیق آورده شده است.



شکل ۷- احتمال خرابی در سطوح مختلف نیرو کمناشی و تأثیر پارامتر L (برای شکل (۳))

برای بررسی تأثیر افزایش تغییرات خطی المان در نظر گرفته شده با توجه به شکل (۸) یک ستون دارای مقطع I شکل و با تغییرات خطی از ابتدا تا انتها در نظر گرفته شده است. به‌طوری‌که ارتفاع جان به صورت خطی افزایش می‌یابد. این ستون در دو انتها به صورت مفصلی است.



شکل ۸- عضو با مقطع متغیر پیوسته به ارتفاع جان ۳۰۰ میلی متر

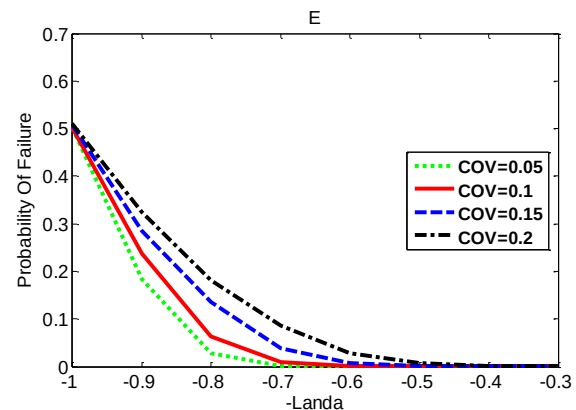
در مقطع کوچک‌تر همانند مثال اول ارتفاع و ضخامت جان به ترتیب برابر ۲۰۰ و ۱۵ میلیمتر ولی مقطع بزرگتر ارتفاع و ضخامت جان به ترتیب برابر ۳۰۰ و ۱۵ میلیمتر می‌باشد. برای محاسبه بار بحرانی در مثال از رابطه (۹) استفاده شده است.

در جدول (۴) مقادیر هر یک از داده‌ها و پارامترهای احتمالاتی مثال نشان داده شده است.

جدول ۴- مقادیر و پارامترهای ورودی مثال دوم

پارامترهای احتمالاتی	معرف	μ	σ
X_1	E	$2/1 \times 10^6$	$0/05\mu$
X_2	I_1	۱۰۲۷۲	$0/05\mu$
X_3	I_2	۲۵۷۵۷	$0/05\mu$
X_4	L	۳۰۰	$0/05\mu$

برای شکل (۸) در حالت اول احتمال خرابی و تأثیر میزان حساسیت مدول الاستیسیته مقطع با تغییر ضریب تغییرات از ۰/۰۵ به ۰/۱ و ۰/۱۵ و ۰/۲ در سطوح مختلف نیرو از بار برابر با بار بحرانی ستون تا بار برابر ۰/۳ بار بحرانی ستون در نمودار شکل (۹) محاسبه شده است. مقادیر پارامترهای دیگر برابر جدول (۴) می‌باشد.



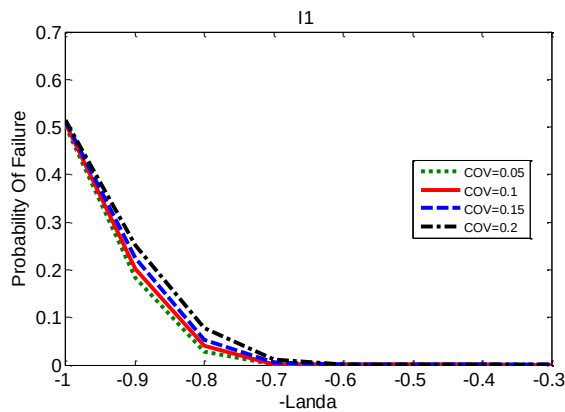
شکل ۹- محاسبه احتمال خرابی در سطوح مختلف نیرو کم‌انرژی و تأثیر پارامتر E (برای شکل (۸))

در حالت بعدی احتمال خرابی و تأثیر میزان ممان اینرسی مقطع کوچک‌تر با تغییر ضریب تغییرات از ۰/۰۵ به ۰/۱ و ۰/۱۵ و ۰/۲ در سطوح مختلف نیرو از بار برابر با بار بحرانی ستون تا بار برابر ۰/۳ بار بحرانی ستون، نمودار شکل (۱۰) محاسبه شده است. مقادیر پارامترهای دیگر برابر جدول (۴) می‌باشد.

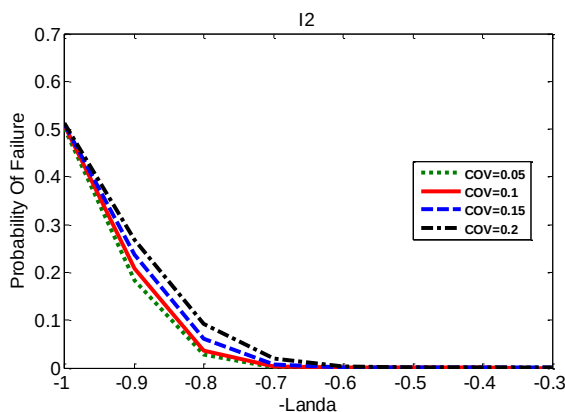
نمودار شکل (۱۱) احتمال خرابی و تأثیر میزان ممان اینرسی مقطع بزرگ‌تر با تغییر ضریب تغییرات از ۰/۰۵ به ۰/۱ و ۰/۱۵ و ۰/۲ در سطوح مختلف نیرو از بار برابر با بار بحرانی ستون تا بار برابر ۰/۳ بار بحرانی ستون را نشان می‌دهد.

حالت چهارم مثال دوم احتمال خرابی و تأثیر میزان طول ستون با تغییر ضریب تغییرات از ۰/۰۵ به ۰/۱ و ۰/۱۵ و ۰/۲ در

سطوح مختلف نیرو از بار برابر با بار بحرانی ستون تا بار برابر ۰/۳ بار بحرانی ستون نمودار شکل (۱۲) محاسبه شده است. مقادیر پارامترهای دیگر برابر جدول (۴) می‌باشد. مطابق شکل (۱۲)، مقدار λ که عکس آن معادل ضریب اطمینان مناسب می‌باشد، برای ضریب تغییرات ۰/۱ و ۰/۱۵ طول ستون، برابر ۰/۶ خواهند بود.



شکل ۱۰- محاسبه احتمال خرابی در سطوح مختلف نیرو کم‌انرژی و تأثیر پارامتر I_1 (برای شکل (۸))

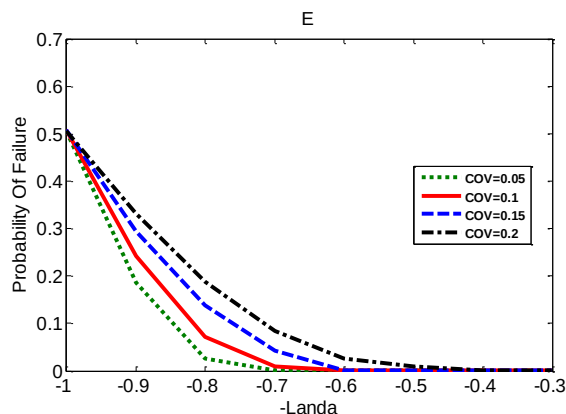


شکل ۱۱- احتمال خرابی در سطوح مختلف نیرو کم‌انرژی و تأثیر پارامتر I_2 (برای شکل (۸))

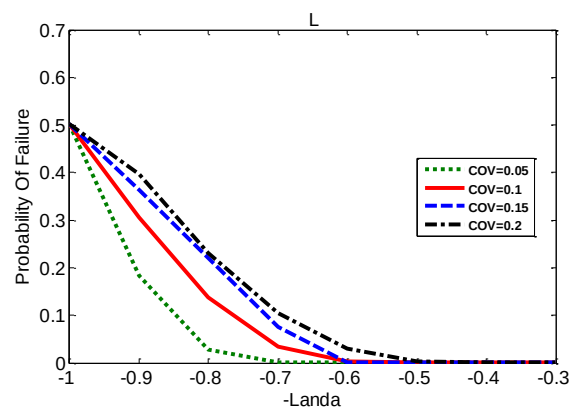
در مثال سوم، در مقطع بزرگ‌تر، ارتفاع جان باز افزایش می‌یابد تا اثرات افزایش نسبت ممان اینرسی دو سر ستون بهتر دیده شود. در این مثال با توجه به شکل (۱۳) یک ستون دارای مقطع I شکل و با تغییرات خطی از ابتدا تا انتها در نظر گرفته شده است بطوری که ارتفاع جان به صورت خطی افزایش می‌یابد. این ستون در دو انتها به صورت مفصلی است. در مقطع کوچک‌تر همانند مثال اول ارتفاع و ضخامت جان به ترتیب برابر ۲۰۰ و ۱۵ میلی‌متر در صورتی که در مقطع بزرگ‌تر ارتفاع و

ضخامت جان به ترتیب برابر ۳۵۰ و ۱۵ میلیمتر می باشد. احتمال خرابی و اثر هر پارامتر در میزان خرابی محاسبه و بررسی شده است.

دو سر ستون تأثیری بر ضریب تغییرات مدول الاستیسیته دارد، دشوار است و احتمال های خرابی بسیار اختلاف ناچیزی با هم دارند.

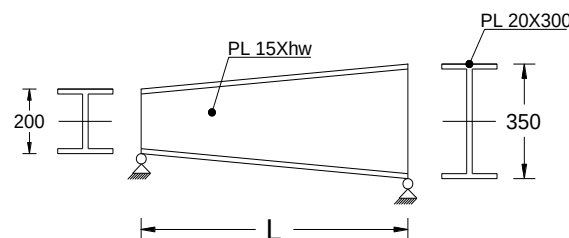


شکل ۱۴- احتمال خرابی در سطوح مختلف نیرو کمانشی و تأثیر پارامتر E (برای شکل (۱۳))



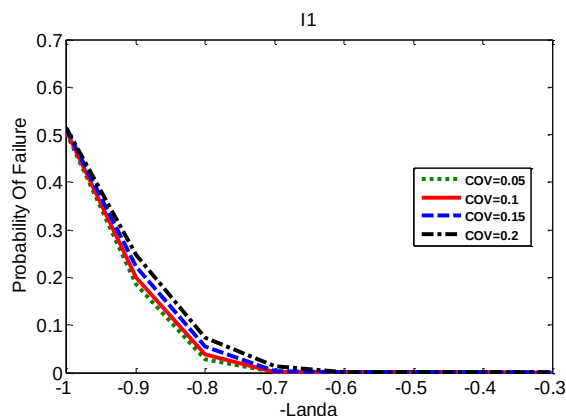
شکل ۱۲- محاسبه احتمال خرابی در سطوح مختلف نیرو کمانشی و تأثیر پارامتر L (برای شکل (۸))

در نمودار شکل (۱۵) احتمال خرابی و تأثیر ممان اینرسی مقطع کوچکتر با تغییر ضریب تغییرات از ۰/۰۵ به ۰/۱ و ۰/۱۵ و ۰/۲ در سطوح مختلف نیرو از بار برابر با بار بحرانی ستون تا بار برابر ۰/۳ بار بحرانی ستون برای شکل ۱۳ نمایش شده است. با توجه به ۳ نمودار شکل های (۵)، (۱۰) و (۱۵) افزایش نسبت ممان اینرسی دو سر ستون سبب کاهش اثر تغییرات ضریب ممان اینرسی مقطع کوچک بر احتمال خرابی شده است.



شکل ۱۳- عضو با مقطع متغیر پیوسته به ارتفاع جان ۳۵۰ میلیمتر

برای محاسبه بار بحرانی در مثال از رابطه (۹) استفاده شده است. در جدول (۵) مقادیر هر یک از داده ها و پارامترهای احتمالاتی مثال نشان داده شده است.



شکل ۱۵- احتمال خرابی در سطوح مختلف نیرو کمانشی و تأثیر پارامتر $I1$ (برای شکل (۱۳))

جدول ۵- مقادیر و پارامترهای ورودی مثال سوم

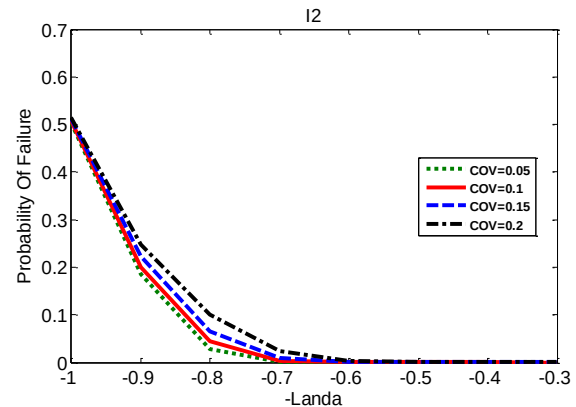
پارامترهای احتمالاتی	معرف	μ	σ
$X1$	E	$2/1 \times 10^6$	$0/05\mu$
$X2$	$I1$	۱۰۲۷۲	$0/05\mu$
$X3$	$I2$	۳۶۴۳۳/۸	$0/05\mu$
$X4$	L	۳۰۰	$0/05\mu$

حالت اول، مثال سوم احتمال خرابی و تأثیر میزان حساسیت مدول الاستیسیته مقطع با تغییر ضریب تغییرات از ۰/۰۵ به ۰/۱ و ۰/۱۵ و ۰/۲ در سطوح مختلف نیرو از بار برابر با بار بحرانی ستون تا بار برابر ۰/۳ بار بحرانی ستون در نمودار شکل (۱۴) نشان داده شده است. از بررسی ۳ نمودار شکل های (۴)، (۹) و (۱۴) نظر دادن در مورد اینکه افزایش نسبت ممان اینرسی

در نمودار شکل (۱۶) احتمال خرابی و تأثیر میزان ممان اینرسی مقطع بزرگتر با تغییر ضریب تغییرات از ۰/۰۵ به ۰/۱ و ۰/۱۵ و ۰/۲ در سطوح مختلف نیرو نمایش داده شده است. از بررسی ۳ نمودار شکل های (۶)، (۱۱) و (۱۶) افزایش نسبت

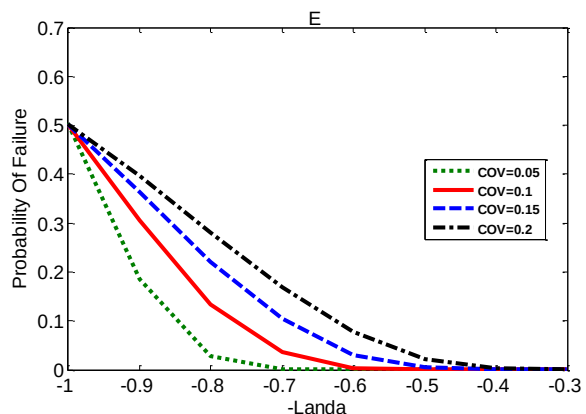


ممان اینرسی دو سر ستون بر عکس اثر کاهش تغییرات ضریب ممان اینرسی مقطع کوچکتر سبب افزایش اثر ممان اینرسی مقطع بزرگتر بر احتمال خرابی شده است.



شکل ۱۶- احتمال خرابی در سطوح مختلف نیرو کمائی و تأثیر پارامتر I_2 (برای شکل (۱۳))

در نمودار شکل (۱۷) تأثیر ضریب تغییرات طول مقطع بررسی شده است. از بررسی شکل‌های (۷)، (۱۲) و (۱۷) افزایش نسبت ممان اینرسی‌ها، اثر خاصی بر ضریب تغییرات طول نداشته است. در این حالت، برای سازه‌های مهم که احتمال‌های خرابی بسیار کوچک مبنای طراحی می‌باشد، مطابق شکل (۱۷) حاصل از تحلیل‌های شبیه‌سازی زیر مجموعه‌ای، مقدار λ برای ضریب تغییرات ۰/۰۵، ۰/۱، ۰/۱۵ و ۰/۲ مدول الاستیسیته، به ترتیب برابر ۰/۷، ۰/۶، ۰/۵ و ۰/۴ خواهند بود.



شکل ۱۷- احتمال خرابی در سطوح مختلف نیروی کمائی و تأثیر پارامتر L (برای شکل (۱۳))

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله بررسی احتمال خرابی یک المان متداول با تغییرات خطی انجام شد. بدین منظور معادلات حاکم بر کمائش ستون با

مقطع متغیر بررسی و روش حل ارائه گردید. سپس، سه مثال عددی با معرفی کمیت‌های احتمالاتی موثر بر کمائش و مقادیر متفاوت ضریب تغییرات، با استفاده از روش مرسوم مونت‌کارلو و روش قدرتمند شبیه‌سازی زیر مجموعه در نرم‌افزار متلب مورد آنالیز قرار گرفت. نتایج بدست آمده نشان دهنده حساسیت بالای دقت طول و مدول الاستیسیته مقطع می‌باشد. و همچنین نشان می‌دهد که تغییرات ممان اینرسی دو سر ستون اثرات ناچیزی بر میزان احتمال خرابی ستون می‌گذارد. البته افزایش نسبت ممان اینرسی دو سر ستون سبب کاهش اثر ممان اینرسی مقطع کوچک و افزایش اثر ممان اینرسی مقطع بزرگتر بر احتمال خرابی می‌گردد. از مقایسه حالت‌های مختلف در هر نمودار مشخص است که با کاهش ضریب بار (λ) احتمال خرابی کاهش می‌یابد به طوری که در اکثر مثال‌ها در $\lambda=0.7$ احتمال خرابی به کمتر از ۰/۰۱ می‌رسد. که می‌توان نتیجه گرفت که عضو در ضریب اطمینان $1/43=1/43$ به یک احتمال خرابی معقول و مناسب می‌رسد. اما برای دقت‌های بالاتر و مسائلی که در آن‌ها ایمنی بسیار مهم بوده و مقادیر کوچک احتمال خرابی تعیین کننده می‌باشد، تحلیل مونت‌کارلوی مرسوم ناکارآمد بوده و پاسخ درستی ارائه نمی‌کند. در این سازه‌ها، مطابق نتایج حاصل از تحلیل‌های شبیه‌سازی زیر مجموعه‌ای ارائه شده، مقدار λ بر حسب ضریب تغییرات هر پارامتر، از ۰/۷ تا ۰/۴ مقادیر قابل قبول خواهند بود.

۶- مراجع

- [۱] سچاجس، ا.، ترجمه کاوه، ع. و برخورداری، م. ع. (۱۳۶۴)، "اصول نظریه پایداری سازه‌ها"، مرکز نشر دانشگاهی.
- [۲] طاحونی، ش. (۱۳۸۹)، "طراحی سازه‌های فولادی"، انتشارات علم و ادب.
- [3] Dinnik, A.N. (1929), "Design of Column of Varying Cross-Section", Transaction of the ASME 51.
- [4] Li, Q.S. (2001), "Analytical Solutions for Buckling of Multi-Step Non-Uniform Columns with Arbitrary Distribution of Flexural Stiffness or Axial Distributed Loading", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 43, No. 2, pp. 349-366.
- [5] Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. (1961), "Theory of Elastic Stability", 2nd Totry, Ed., McGraw-Hill, New York.
- [6] Yasin, Y., Zekeriya, G. Savas E. (2013), "Buckling Analyses of Axially Functionally Graded Nonuniform Columns with Elastic Restraint Using a Localized Differential Quadrature Method", Mathematical Problems in Engineering, Article ID 793062, pp. 1-12.
- [7] Gere, J.M. and Carter, W.O. (1962), "Critical Buckling Load for Tapered Columns", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 88, No. 1, pp. 1-11.
- [8] Frisch-Fay, R. (1966), "On the Stability of a Strut under Uniformly Distributed Axial Forces", International Journal of Solids and Structures, Vol. 2, No. 3, pp. 361-369.



- [17] Lee, B.K., Carr, A.J. and Lee, T.E., and Kim, I.J. (2006), "Buckling Loads of Columns with Constant Volume", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 294, pp. 381-387.
- [18] Rahai, A.R., and Kazemi, S., (2008), "Buckling Analysis of Non-Prismatic Columns Based on Modified Vibration Modes", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 13, No. 8, pp. 1721-1735.
- [19] Konstantakopoulos, G., Raftoyiannis, G. and Michaltsos, T. (2012), "Stability of Steel Columns with Non-Uniform Cross-Sections", *The Open Construction and Building Technology Journal*, Vol. 6, pp. 1-7.
- [20] Kaveh, A., Massoudi, M.S. and GhanooniBagha, M. (2014), "Determination of Structural Reliability Using Charged System Search Algorithm", *Transaction of Civil Engineering, IIIT*, Vol. 38, No. C2, pp. 1-10.
- [21] Elishakoff, I. and Archaud, E. (2013), "Modified Monte Carlo Method for Buckling Analysis of Nonlinear Imperfect Structures", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 83, No. 9, pp. 1327-1339.
- [۲۲] شایانفر، م.ع.، قانونی بقا، م. و جهانی، ا. (۱۳۹۴)، "تحلیل قابلیت اطمینان سازه‌ها"، انتشارات دانشگاه علم و صنعت.
- [23] Siu-Kui, A. and Beck, J.L. (2001), "Estimation of Small Failure Probabilities in High Dimensions by Subset Simulation", *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 16, No. 4, pp. 263-277.
- [24] Pfluger, A. (1964), "Stabilitats problem der Elastostatik", Springer Verlag, Berlin.
- [9] O'Rourke, M., and Zebrowski, T. (1977), "Buckling load for nonuniform columns", *Computers & Structures*, Vol. 7, No. 6, pp. 717-720.
- [10] Iromenger, M.J. (1980), "Finite Difference Buckling Analysis of Non-Uniform Columns", *Computers & Structures*, Vol. 12, No. 5, pp. 741-748.
- [11] Smith, W.G. (1988), "Analytical Solution for Tapered Column Buckling", *Computers & Structures*, Vol. 28, No. 5, pp. 677-681.
- [12] Ermopoulos, J. (1986), "Buckling of Tapered Bars under Stepped Axial Loads", *Journal of Structural Engineering ASCE*, Vol. 112, No. 6, pp. 1346-1354.
- [13] Arbabi, F. and Li, F. (1991), "Buckling of Variable Cross-Section Columns Integral Equation Approach", *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 117, No. 8, pp. 2426-2441.
- [14] Siginer, A. (1992), "Buckling of Columns of Variable Flexural Rigidity", *Journal of Engineering mechanic, ASCE*, Vol. 118, No. 3, pp. 543-640.
- [15] Sampaio, J.H.B. and Hundaussen, J.R. (1998), "A Mathematical Model and Analytical Solution for Buckling of Inclined Beam Column", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 22, pp. 405-421.
- [16] Elishakoff, I. and Rollet, O. (1999), "New Closed Form Solutions for Buckling of Variable Stiffness Column by Mathematica", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 224, No. 1, pp. 172-182.

پی نوشت

¹ Subset Simulation

