



تعیین و حل معادله مشخصه کمانش خمشی سوله‌های دو دهانه با تکیه‌گاه‌های مفصلی برای حالت آزاد در برابر حرکت جانبی

علی اصغر صفوی^۱، عباس حق‌اللهی^{۲*}

۱- دانشجوی دکتری، مهندسی عمران، دانشگاه تربیت دبیر شهیدرجایی، تهران

۲- استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه تربیت دبیر شهیدرجایی، تهران

* تهران، صندوق پستی ۱۵۸۱۱-۱۶۷۸۸، haghollahi@sru.ac.ir

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۲/۰۹، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۶/۲۶)

چکیده

در این مقاله تعیین بار کمانش خمشی درون صفحه ستون‌های با مقطع متغیر در سوله‌های دو دهانه متقارن برای حالت آزاد در برابر حرکت جانبی با روشی خاص ارائه می‌گردد. تحلیل مسئله بر اساس جواب معادله دیفرانسیل تغییرشکل در ستون، اعمال شرایط مرزی تغییرشکل در سر ستون و رابطه همسازی بین تغییرمکان‌های گرهی اعضای سوله انجام می‌شود. بدین ترتیب دستگاه معادلاتی بر حسب پارامترهای نامعین (در جواب معادله دیفرانسیل تغییرشکل ستون) به دست می‌آید، این دستگاه معادلات قابل تبدیل به صورت معادله ماتریسی است. وضعیت ناپایداری، متناظر با صفر شدن دترمینان ماتریس ضرایب است. نتایج تحلیل درباره تعدادی مسئله گزارش گردیده و با نتایج حاصل از مطالعه سایر محققین مقایسه شده است. مقایسه نشان می‌دهد که با توجه به حل تحلیلی معادله دیفرانسیل، روش ارائه شده دقیق بوده و این فرمول‌بندی قابل تعمیم به سایر قاب‌های دارای اعضای با مقطع متغیر است.

واژگان کلیدی

معادله مشخصه، سوله دو دهانه، کمانش آزاد در برابر حرکت جانبی، معادله دیفرانسیل، معادله همسازی

Determination and Solving of Characteristic Equation of Flexural Buckling of Two-bay Gable Frames with Hinged Bases for State of Free to Sway

A. Safavi, A. Haghollahi

Abstract

In this paper flexural buckling load for tapered columns has been evaluated (in-plane buckling of frame). The studied issue is about two-bay frames. Their three bases are hinged, and sway is permitted. The analysis is based on the answer of the deformation differential equation of the column, imposing the boundary conditions at the tips of the columns, and the displacement compatibility equations at the nodes of the members. Therefore, a set of equations could be obtained. When the corresponding square matrix of the equations collection is available, the critical load will be calculated. The critical load is the minimum root of the characteristic equation. This equation is obtained by equating the determinate of that matrix to zero. The results of the analysis are compared with the other methods of other researchers in some examples. The comparison showed that the introduced method can calculate the critical load with a good accuracy. This method can be generalized for other frames made of tapered members.

Keywords

Flexural buckling, Gable frames, Tapered columns, Deformation differential equation



از روش‌های ثبت شده برای محاسبه‌ی بار بحرانی کمانش ارتجاعی ستون‌های با مقطع متغیر می‌توان راه‌حل‌های تیموشنکو [۱]، مورلی [۲] و دینیک [۳] را نام برد. تمامی این راه‌حل‌ها تقریبی بوده و ستون با استفاده از ستون‌های پله‌ای متوالی تقریب زده می‌شد. برای اولین بار، حلی برای محاسبه‌ی بار بحرانی کمانش ارتجاعی ستون‌های غیرمنشوری توسط Gere و Carter [۴] با استفاده از توابع بسل ارائه گردید. از راه‌حل‌های اخیر با روش تفاضلات محدود، کار Iremonger [۵] و از روش اجزای محدود مطالعه Karabalis و Beskos [۶] را می‌توان نام برد. Brown [۷] با تحلیل تغییرشکل‌های بال‌های تیر I-شکل غیرمنشوری در پیچش، معادله دیفرانسیل تغییرشکل مقطع را در پیچش غیریکنواخت بدست آورد. او معادله‌ی به‌دست آمده را در بررسی کمانش خمشی-پیچشی تیر غیرمنشوری با تکیه‌گاه‌های ساده مورد استفاده قرار داد. Ermopoulos و Kounadis [۸] به بررسی پایداری قاب‌های با مقاطع متغیر پرداختند. آنها روشی را برای پیدا کردن ماتریس سختی خمشی معادل عضو با مقطع متغیر ارائه نمودند و تابع تغییرشکل عضو منشوری معادل را برای تابع تغییرشکل یک عضو غیرمنشوری، در نظر گرفتند. Ermopoulos [۹] در تحقیقی دیگر به پایداری قاب‌های با مقاطع متغیر پرداخت و پایداری اعضای با مقطع متغیر را -که تحت فشار توسط بارهای متمرکز در طول هستند- بررسی کرد و به طراحی بهینه اعضای غیرمنشوری فشاری پرداخت. Williams و Banerjee [۱۰] تحقیقی را انجام دادند که نتیجه‌ی آن پاسخگوی دامنه‌ی وسیعی از اشکال هندسی سطح مقطع ستون‌های ماهیچه‌ای با تغییرات خطی ابعاد در تمام یا برخی از اجزای تشکیل دهنده‌ی مقطع (بال‌ها و یا جان) در طول عضو است. Yang [۱۱] پایداری تیرستون‌های I-شکل غیرمنشوری را مورد بررسی قرار داد. در آن مطالعه رفتار قاب‌های صفحه‌ای بدون مهاربند -که از تیر و ستون‌های مقطع متغیر ساخته شده است- در تغییرشکل و حرکت جانبی قاب مورد بررسی قرار گرفت. Bradford [۱۲] در مقاله‌ای پس از به‌دست آوردن معادلات تعادل یک تیر I-شکل مقطع متغیر، تاثیر لنگر پیچشی را روی آن با فرمول‌بندی روش اجزای محدود بررسی کرد و از روش کار مجازی، بارهای کمانش جانبی را با حل مسئله مقدار ویژه محاسبه کرد. Soltani و همکارانش [۱۸] در مقاله‌ای تحلیل ناپایداری ارتجاعی کمانش خمشی-پیچشی و ارتعاش آزاد تیرهای با مقطع متغیر را با روش سری‌های توانی

انجام دادند. ایشان معادلات تعادل و معادله حرکت برای ارتعاش آزاد را با ایستا کردن انرژی پتانسیل کل تیر-ستون با مقطع دلخواه به دست آوردند. Soltani و همکارانش [۱۹] در تحقیقی مشابه پژوهش پیشین براساس روش سری‌های توانی و با توجه به اصل کار مجازی، به تحلیل ارتعاش آزاد و کمانش خمشی-پیچشی تیر با مقطع متغیر و شکل دلخواه پرداختند. این کار برخلاف تحقیق پیشین، با مفاهیم روش اجزای محدود و ساخت ماتریس‌های جرم و سختی انجام گردید. توابع شکل موردنیاز برای ساخت ماتریس سختی با کمک مشتق‌گیری از سری‌های توانی به دست آمد. Kováč [۲۰] کمانش جانبی-پیچشی تیرهای I-شکل با مقطع متغیر را بررسی کرد. با بررسی هندسه تغییرشکل مقطع در حین کمانش جانبی-پیچشی تیر و به کار بستن روش رایلی-ریتز و روش باقیمانده‌های وزن‌دار در حل معادله دیفرانسیل تغییرشکل، مسئله موردنظر را حل کرد. Rahai و Kazemi [۲۱] تحلیل کمانشی ستون‌های غیرمنشوری را براساس مودهای ارتعاشی و روش‌های انرژی انجام دادند. ایشان در این مطالعه با به کار بستن شکل‌های مودی ارتعاش و اصل ایستا کردن انرژی پتانسیل کل، بار بحرانی کمانش ستون را به دست آوردند. Bradford و Valipour [۲۲] در پژوهشی تابع شکل تیر با مقطع متغیر و تکیه‌گاه‌های ارتجاعی را معرفی کردند. ایشان در این تحقیق از اصل کار مجازی استفاده کردند و فرمول‌بندی را بر اساس فرض اویلر-برنولی، رفتار ارتجاعی برای مصالح و عدم رخداد کمانش موضعی به دست آوردند. Konstantakopoulos و همکارانش [۲۳] پایداری یک تیر-ستون تنها را با انواع اشکال تغییر مقطع از جمله صور پله‌ای، شیب‌دار به یک سمت و افزایش عمق عضو از طرفین به سمت میانه طول بررسی کرد. ایشان علاوه بر نیروی فشاری اعمالی، اثر لنگرها، نیروهای محوری متمرکز و تغییرشکل‌های اولیه را در تحلیل مسئله بررسی کردند. Darbandi و همکارانش [۲۴] با روش تئوری اختلالات به کمانش ستون‌های با مقطع متغیر پرداختند. در روند حل با برابر قرار دادن جملات هم‌درجه از پارمتر اختلال، ضرایب جواب مشخص گردید. در آن تحقیق به حل معادله دیفرانسیل حاکم بر کمانش خمشی ستون با رفتار اویلر-برنولی به روش مذکور پرداخته شد. Hadidi و همکارانش [۲۵] به تحلیل غیرخطی مرتبه دوم تیرهای با مقطع متغیر پرداختند. ایشان در فرایند حل معادله دیفرانسیل تغییرشکل از روش سری‌های توانی استفاده کردند. ایشان حضور بارهای متمرکز در طول تیر را نیز در نظر گرفتند. Wei و همکارانش [۲۶] کمانش



خمشی ستون‌های غیرمنشوری را که در معرض بار متمرکز انتهایی و بارگسترده هستند، بررسی کردند. ایشان معادله دیفرانسیل حاکم بر تغییرشکل حین کمانش ستون با شرایط انتهایی گوناگون را به صورت معادله انتگرال در آورده، کم‌ترین مقدار ویژه متناظر با معادله انتگرال را به دست آوردند. پایداری و ارتعاش آزاد ستون‌های با مقطع متغیر که در انتها دارای فنرهای الاستیک هستند با روش تربیع دیفرانسیلی^۱ توسط Taha و Essan [۲۷] انجام گردید. ایشان پس از به دست آوردن معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش و کمانش ستون، از روش تربیع دیفرانسیلی در حل تقریبی معادله دیفرانسیل استفاده کردند. Shoostari و Khajavi [۲۸] روشی را برای یافتن توابع شکل و ماتریس سختی تیرهای غیرمنشوری معرفی کردند. در این پژوهش حرکت‌های جسم صلب از تابع کرنش‌ها جدا گردید و توابع درونیابی کرنش برحسب تغییرشکل‌های گرهی المان تیر به دست آمد. ایشان بار بحرانی و فرکانس مود اول را با تقریب خوب محاسبه کردند. Ruocco و همکارانش [۲۹] روش مدل میله هنکی^۲ را برای تحلیل کمانش خمشی ستون‌های غیر منشوری به کار بستند. در این مدل، ستون مورد نظر به چندین تکه ستون صلب تقسیم می‌شود که هر دو ستون صلب مجاور با یک فنر دورانی به هم متصل شده‌اند. سختی دورانی هر فنر بر مبنای ممان اینرسی مقطع ستون در آن محل محاسبه می‌شود. بار بحرانی مود اول کمانش ستون اولیه تقریباً با کوچک‌ترین ریشه معادله‌ای برابر است که در آن دترمینان ماتریس ضرایب با مقدار صفر برابر است. Šalinic و Nikolic [۳۰] به تعیین بار بحرانی کمانش خمشی ستون‌های غیر منشوری با روشی مشابه مدل میله هنکی، موسوم به روش میله‌های صلب چندگانه^۳ پرداختند. در این روش بین هر دو تکه ستون صلب مجاور دو فنر (دورانی و انتقالی) در نظر گرفته شده است. تغییر طول فنرهای انتقالی متناظر با جابجایی جانبی هر نقطه از ستون در کمانش بوده است.

آنچه تاکنون اشاره شد، تحقیقات انجام شده روی ستون‌های ماهیچه‌ای منفرد بود. تحقیقات انجام شده روی رفتار و پایداری ستون‌های غیرمنشوری تشکیل دهنده قاب‌ها، در ادامه به آن اشاره شده است:

راه‌حل تقریبی Lee و همکارانش [۳۱] که با استفاده از روش ریلی-ریتز و با الهام از روش سریهای توانی و حساب تغییرات انجام شده که نتیجه‌ی آن نمودارهای ضریب طول موثر، با علائم و پارامترهای مشابه نمودارهای ژولیان و لورنس بوده است. در این روش قاب موردنظر با اعضای مقطع متغیر به یک

قاب ساده‌ی چهارگوش -که دارای دو ستون (در طرفین) و دو تیر (در بالا و پایین) است- تبدیل می‌شود. راه‌حل تقریبی پیشنهادی Irani [۳۲] با یک سری فرضیات و حل معادله‌ی دیفرانسیل تقریبی کمانش قاب با اعمال شرایط تعادل و پیوستگی در گره‌های انجام دادند. Bazeos و همکارانش [۳۳] برای محاسبه‌ی بار بحرانی قاب‌های صفحه‌ای دارای مقطع متغیر روشی ارائه کردند. در این روش با بدست آمدن ماتریس سختی کل سازه بر اساس جواب معادله دیفرانسیل تغییرشکل ستون، بار بحرانی ستون‌های قاب بدست آمد. Saffari و همکارانش [۳۴] با در نظر گرفتن سهمی درجه‌ی دو برای تغییرات تابع ممان اینرسی ستون و تیر در یک قاب شیب‌دار یک دهانه‌ی متقارن، مسئله را بررسی کرده و نمودارهای ضریب طول موثر را به دست آوردند. Momeni و Tajizadegan [۳۵]، Riahi و همکارانش [۳۶] در مقالات جداگانه و مشابه، با کمک روابط شیب افت در حضور نیروی محوری برای عضو با مقطع متغیر و استفاده از روابطی که در مقاله Lee و همکارانش [۳۰] آمده است، نمودارهای ضریب طول موثر سوله‌های تک دهانه را برای حالات کمانش با حرکت جانبی آزاد و مقید ترسیم کردند. Rezaiee-Pajand و همکارانش [۳۷] در مقاله‌ای پایداری قاب‌های پرتال (با ستون‌های مقطع متغیر و با اتصالات نیمه‌گیردار به تیر) را بررسی کردند و حالات حرکت جانبی آزاد و مقید را برای قاب در نظر گرفتند. تابع ممان اینرسی مقطع ستون را با یک تک‌جمله‌ای جبری درجه‌ی n از متغیر طول (x) تقریب زده و در معادله دیفرانسیل تغییرشکل استفاده شد. در مطالعه‌ای از نویسندگان مقاله حاضر، کمانش خمشی سوله‌های یک دهانه با ستون‌های آزاد در برابر حرکت جانبی بررسی شده است [۳۸]. در آن مطالعه روش عددی تفاضلات محدود همراه با روش کار مجازی به کار گرفته شده است. همچنانکه مشاهده می‌شود، در اغلب مطالعات محققین، روش‌های عددی که منجر به نتایج تقریبی می‌شود به کار رفته است، از سوی دیگر مسئله کمانش خمشی سوله‌های دو دهانه، بسیار اندک بررسی شده است. تنها مرجع مشاهده شده، مرجع [۳۱] است که به این مسئله پرداخته است. البته در این مرجع از حضور جان در مقطع صرف‌نظر شده، که این عاملی برای تقریبی شدن نتایج است. در این مقاله، با تلفیق مجموعه‌ای از معادلات، شامل معادله دیفرانسیل تغییر شکل در ستون‌های سوله، معادلات همسازی دوران در گره‌ی سر ستون‌ها، معادلات تعادل لنگر و شیب‌افت در تیرهای مورب، نهایتاً سه معادله خطی حاوی سه ضریب نامعین و جملاتی بر حسب نیروی محوری ستون‌ها حاصل شد.



حالت ناپایداری سوله، متناظر با صفر شدن دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه معادلات است.

۲- قاب‌های تفکیک‌پذیر و تفکیک‌ناپذیر در مسئله

کمانش

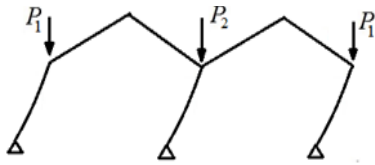
بار بحرانی یک ستون سازه را می‌توان متناظر با هر حالت بارگذاری اعمالی به سازه تعیین کرد. از آنجایی که شکل بارهای خارجی وارد بر سازه‌ها در حالت کلی قابل تعیین نیست، بار بحرانی طراحی یک ستون باید متناظر با کم‌ترین بار بحرانی آن ستون، بین تمام حالات بارگذاری اعمالی باشد. در برخی از سازه‌ها، می‌توان حالت بارگذاری را که متناظر با کم‌ترین بار بحرانی هر ستون است، تشخیص داد، این سازه‌ها را سازه‌های تفکیک‌پذیر نامگذاری می‌کنیم. این سازه‌ها قابل تفکیک به بخش‌های کوچک‌تر (زیرسازه) هستند که در هر بخش تنها یک ستون از سازه و تیرهای متصل به آن حضور دارند و برای تعیین بار بحرانی یک ستون، به جای تحلیل کمانشی کل سازه می‌توان تحلیل را برای زیرسازه‌ی حاوی آن ستون انجام داد. مثلاً برای سوله‌های یک دهانه‌ی متقارن، کم‌ترین بار بحرانی هر ستون متناظر با حالت بارگذاری است که بار متمرکز روی دو ستون یکسان و به صورت فشاری است. در بیش‌تر سازه‌ها، خصوصاً در سازه‌های نامتقارن، نمی‌توان آن حالت بارگذاری را تشخیص داد، این سازه‌ها را سازه‌های تفکیک‌ناپذیر نامگذاری می‌کنیم. اغلب سوله‌های دو دهانه‌ی متقارن و آزاد در برابر حرکت جانبی، تفکیک‌ناپذیر هستند، مگر در حالتی که ممان اینرسی مقطع ستون میانی در تک‌تک مقاطع عرضی دو برابر ممان اینرسی ستون کناری باشد. در قاب‌های تفکیک‌ناپذیر، بار بحرانی هر ستون وابسته به مقدار نیروی فشاری ستون دیگر است.

۳- کمانش خمشی سوله‌های متقارن دو دهانه آزاد در

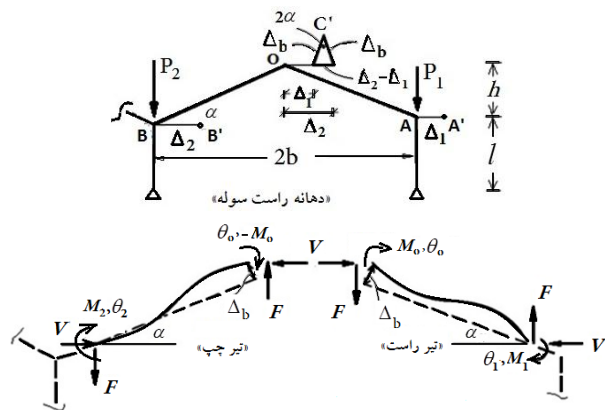
برابر حرکت جانبی و حصول معادله مشخصه آن

همچنانکه در بخش قبل مطرح شد، اغلب سوله‌های دو دهانه متقارن آزاد در برابر حرکت جانبی تفکیک‌پذیر نیستند. بدین معنی که بار بحرانی کمانش ارتجاعی هر ستون وابسته به مقدار نیروی فشاری ستون دیگر است. شکل قاب و بارگذاری متناظر در شکل (۱) آمده است. با توجه به تقارن سازه، تغییرشکل‌های گرهی تیرهای دهانه راست سوله و دیاگرام آزاد آن‌ها در شکل (۲) رسم شده است. با توجه به شکل (۲) می‌توان روابط

همسازی، شیب افت و تعادل را نوشت.



شکل ۱- مود اول کمانش ستون‌های سوله دو دهانه آزاد در برابر حرکت جانبی



شکل ۲- نیروها، لنگرها و تغییرشکل‌های انتهایی تیرهای دهانه راست از سوله دو دهانه کمانش یافته آزاد در برابر حرکت جانبی

الف- رابطه همسازی تغییرشکل‌ها:

$$\Delta_b = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2 \sin \alpha} \quad (1)$$

در این رابطه Δ_b اندازه جابجایی نسبی دو انتهای هر تیر در راستای عمود بر راستای اولیه تیر است. Δ_1 و Δ_2 هم جابجایی جانبی سر ستون‌های کناری و میانی است. با توجه به تقارن تیرهای هر دهانه نسبت به راس سوله (علاوه بر تقارن سوله دو دهانه نسبت به محور ستون میانی)، ضرایب شیب افت در دو دهانه مشابه خواهند بود (C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 در معادلات شیب افت دو تیر)، این ضرایب برای تیر غیر منشوری در جداول کتب تحلیل سازه‌ها در دسترس و با انتگرال‌گیری از معادله دیفرانسیل تغییرشکل در تیر و اعمال شرایط مرزی قابل تعیین است. مثلاً برای حالت خاص تیرهای منشوری، C_1 و C_4 با $4EI/l$ و C_2 با $2EI/l$ برابر است.

ب- معادلات شیب افت در تیر راست:

$$M_1 = C_1 \theta_1 + C_2 \theta_0 + C_3 \Delta_b \quad (2)$$

$$M_0 = C_2 \theta_1 + C_4 \theta_0 + C_5 \Delta_b \quad (3)$$



ج- معادلات شیب افت در تیر چپ:

$$M_2 = C_1\theta_2 + C_2\theta_0 - C_3\Delta_b \quad (4)$$

$$-M_0 = C_2\theta_2 + C_4\theta_0 - C_5\Delta_b \quad (5)$$

توجه شود که با توجه به شکل (۲)، علامت جابجایی نسبی (Δ_b) در تیرهای راست و چپ متفاوت است.

د- معادلات تعادل لنگر در تیرهای راست و چپ (h و b) به ترتیب طول تصاویر قائم و افقی تیر مورب است:

$$M_0 + M_1 = Fb - Vh \quad (6)$$

$$-M_0 + M_2 = Fb + Vh \quad (7)$$

با تفاضل دو معادله اخیر، لنگر M_0 برحسب سایر پارامترها محاسبه می‌گردد:

$$M_0 = \frac{1}{2}(M_2 - M_1) - Vh \quad (8)$$

بنابراین:

$$\frac{1}{2}(M_2 - M_1) - Vh = C_2\theta_1 + C_4\theta_0 + C_5\Delta_b \quad (9)$$

با جمع بستن دو معادله دوم از دو دسته معادله شیب افت نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$0 = C_2(\theta_1 + \theta_2) + 2C_4\theta_0 \rightarrow \theta_0 = -\frac{C_2}{2C_4}(\theta_1 + \theta_2) \quad (10)$$

با قرار دادن نتیجه اخیر در دو معادله اول شیب افت معادلات (۱۱) و (۱۲) حاصل می‌شوند:

$$M_1 = C'_1\theta_1 + C'_2\theta_2 + C_3\Delta_b \quad (11)$$

$$M_2 = C'_2\theta_1 + C'_1\theta_2 - C_3\Delta_b \quad (12)$$

که در آن:

$$C'_1 = C_1 - \frac{C_2^2}{2C_4} \quad (13)$$

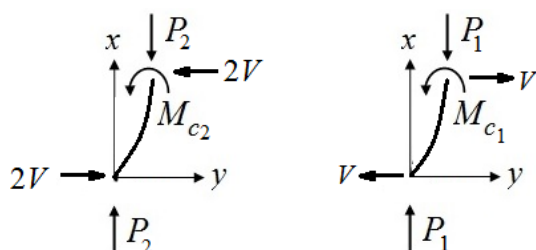
$$C'_2 = -\frac{C_2^2}{2C_4} \quad (14)$$

ضمناً:

$$\frac{1}{2}(M_2 - M_1) - Vh = \frac{C_2}{2}\theta_1 - \frac{C_2}{2}\theta_2 + C_5\Delta_b \quad (15)$$

حال مقادیر تغییرشکل‌ها و لنگرها با توجه به معادله دیفرانسیل تغییرشکل ستون‌ها قابل تعیین است. پس از حل معادله دیفرانسیل تغییرشکل در ستون کناری ($v_1'' + P_1v_1/EI_1 + Vx/EI_1 = 0$) و اعمال شرط مرزی صفر در تکیه‌گاه پای ستون، مقادیر تغییر شکل‌های گرهی سر ستون

(Δ_1 و θ_1) تعیین شده و توابع f_1 و g_1 به صورت $g_1(P_1) = (\theta_1 + V/P_1)/A_1$ و $f_1(P_1) = (\Delta_1 + Vl/P_1)/A_1$ قابل معرفی است، همچنین برای ستون میانی با معادله دیفرانسیل $v_2'' + P_2v_2/EI_2 - 2Vx/EI_2 = 0$ متناظر به صورت $f_2(P_2) = (\Delta_2 - 2Vl/P_2)/A_2$ و $g_2(P_2) = (\theta_2 - 2V/P_2)/A_2$ تعریف می‌گردند (اندیس یک و دو به ترتیب مربوط به ستون‌های کناری و میانی است). A_2 و A_1 به ترتیب، ثابت نامعین در جواب معادله دیفرانسیل تغییرشکل ستون‌های کناری و میانی است). توابع f و g به ثابت مزبور وابسته نیستند (ثابت موردنظر از صورت و مخرج کسر ساده می‌شود). این توابع در برنامه‌ی رایانه‌ای مورد نظر برای سوله با مشخصات هندسی مشخص محاسبه شده و در فرایند تعیین بارهای بحرانی ستون‌های سوله دو دهانه، مورد استفاده واقع می‌شوند. مثلاً در سوله‌هایی که ستون‌های کناری آن‌ها منشوری است، توابع $f_1(P_1)$ یا $g_1(P_1)$ ، به ترتیب برابر با $\sin\lambda_1 l$ و $\lambda_1 \cos\lambda_1 l$ خواهند بود ($\lambda_i = \sqrt{P_i/EI_{ci}}$). در حالت ستون‌های با جان متغیر، توابع f و g حاوی جملات بسیار طولانی و وابسته به مشخصات هندسی ستون است و نوشتن هریک از این توابع، حتی برای یک ستون مشخص از حوصله‌ی متن خارج است.



شکل ۳- دیاگرام آزاد بخشی از ستون کناری کمناش یافته (راست) و ستون میانی کمناش یافته (چپ)

اکنون با توجه به جهت نیروی برشی در ستون کناری و میانی در شکل (۳) و دانستن معادله‌ی توابع f و g در حالت ستون‌های منشوری مقادیر تغییرشکل‌های گرهی برای حالت ستون‌های منشوری به صورت روابط:

$$\Delta_1 = A_1 f_1(P_1) - \frac{V}{P_1} l = A_1 \sin\lambda_1 l - \frac{V}{P_1} l$$

$$\Delta_2 = A_2 f_2(P_2) + 2\frac{V}{P_2} l = A_2 \sin\lambda_2 l + \frac{V}{P_2} l$$

$$\theta_1 = A_1 g_1(P_1) - \frac{V}{P_1} = A_1 \lambda_1 \cos\lambda_1 l - \frac{V}{P_1}$$

و نهایتاً با جانشانی مقادیر پارامترها در معادله (۱۵)، معادله (۲۲) ساخته می‌شود:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} P_2 A_2 f_2(P_2) - P_1 A_1 f_1(P_1) \right] - Vh$$

$$= \frac{C_2}{2} \left[A_1 g_1(P_1) - \frac{V}{P_1} \right] - \frac{C_2}{2} \left[A_2 g_2(P_2) + 2 \frac{V}{P_2} \right] \quad (22)$$

$$+ \frac{C_5}{2 \sin \alpha} \left[A_2 f_2(P_2) + 2 \frac{V}{P_2} l - A_1 f_1(P_1) + \frac{V}{P_1} l \right]$$

همچون گذشته به فاکتورگیری جملات پرداخته می‌شود:

$$A_1 \left[\frac{1}{2} P_1 f_1(P_1) + \frac{C_2}{2} g_1(P_1) - \frac{C_5}{2 \sin \alpha} f_1(P_1) \right]$$

$$+ A_2 \left[-\frac{1}{4} P_2 f_2(P_2) - \frac{C_2}{2} g_2(P_2) + \frac{C_5}{2 \sin \alpha} f_2(P_2) \right] \quad (23)$$

$$+ V \left[h - \frac{1}{2} \frac{C_2}{P_1} - \frac{C_2}{P_2} + \frac{C_5}{2 \sin \alpha} \left(2 \frac{1}{P_2} l + \frac{1}{P_1} l \right) \right] = 0$$

حال با داشتن سه معادله با سه ضریب نامعین می‌توان دستگاه معادلات حاوی سه معادله داشت و آنرا به صورت ماتریسی $KX = \{0\}$ نوشت. به طوری که:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ V \end{bmatrix} \quad (24)$$

برای وجود جواب‌های غیر بدیهی (جواب‌های غیر صفر) برای ضرایب نامعین (A_1 , A_2 و V) باید دترمینان ماتریس ضرایب مساوی با صفر گذاشته شود (به زبان ریاضی گفته می‌شود که هسته نگاشت خطی، صفر بعدی نیست). با این کار معادله‌ای برحسب متغیرهای P_1 و P_2 حاصل می‌شود (معادله مشخصه). درایه‌های ماتریس ضرایب در ادامه خواهد آمد.

$$K_{11} = -P_1 f_1(P_1) + C_1' g_1(P_1) - \frac{C_3}{2 \sin \alpha} f_1(P_1) \quad (25)$$

$$K_{12} = C_2' g_2(P_2) + \frac{C_3}{2 \sin \alpha} f_2(P_2) \quad (26)$$

$$K_{13} = -\frac{C_1'}{P_1} + 2 \frac{C_2'}{P_2} + \frac{C_3}{2 \sin \alpha} \left(2 \frac{1}{P_2} l + \frac{1}{P_1} l \right) \quad (27)$$

$$K_{21} = C_2' g_1(P_1) + \frac{C_3}{2 \sin \alpha} f_1(P_1) \quad (28)$$

$$K_{22} = -\frac{1}{2} P_2 f_2(P_2) + C_1' g_2(P_2) - \frac{C_3}{2 \sin \alpha} f_2(P_2) \quad (29)$$

$$K_{23} = -\frac{C_2'}{P_1} + 2 \frac{C_1'}{P_2} + \frac{C_3}{2 \sin \alpha} \left(2 \frac{1}{P_2} l + \frac{1}{P_1} l \right) \quad (30)$$

$$K_{31} = \frac{1}{2} P_1 f_1(P_1) + \frac{C_2}{2} g_1(P_1) - \frac{C_5}{2 \sin \alpha} f_1(P_1) \quad (31)$$

$$K_{32} = -\frac{1}{4} P_2 f_2(P_2) - \frac{C_2}{2} g_2(P_2) + \frac{C_5}{2 \sin \alpha} f_2(P_2) \quad (32)$$

$$K_{33} = -\frac{1}{2} \frac{C_2}{P_1} - \frac{C_2}{P_2} + \frac{C_5}{2 \sin \alpha} \left(2 \frac{1}{P_2} l + \frac{1}{P_1} l \right) + h \quad (33)$$

$$\theta_2 = A_2 g_2(P_2) + 2 \frac{V}{P_2} = A_2 \lambda_2 \cos \lambda_2 l + 2 \frac{V}{P_2}$$

و

$$\Delta_b = \frac{1}{2 \sin \alpha} \left[A_2 f_2(P_2) + 2 \frac{V}{P_2} l - A_1 f_1(P_1) + \frac{V}{P_1} l \right]$$

$$= \frac{1}{2 \sin \alpha} \left[A_2 \sin \lambda_2 l + 2 \frac{V}{P_2} l - A_1 \sin \lambda_1 l + \frac{V}{P_1} l \right]$$

حاصل می‌شوند. از سوی دیگر لنگرهای داخلی در سرستون‌های کناری و میانی به ترتیب برابر با $M_1 = P_1 \Delta_1 - V l$ و $2M_2 = P_2 \Delta_2 - 2V l$ است، بنابراین، اکنون می‌توان نوشت:

$$M_1 = P_1 A_1 f_1(P_1) \quad (16)$$

$$M_2 = \frac{1}{2} P_2 A_2 f_2(P_2) \quad (17)$$

که در آن، M_2 لنگر خمشی انتهایی هر یک از تیرهای مورب در مجاورت اتصال به ستون میانی است (شکل (۲)).

با جایگذاری مقادیر اخیر در معادله (۱۱) می‌توان نوشت:

$$P_1 A_1 f_1(P_1) = C_1' \left[A_1 g_1(P_1) - \frac{V}{P_1} \right]$$

$$+ C_2' \left[A_2 g_2(P_2) + 2 \frac{V}{P_2} \right] \quad (18)$$

$$+ \frac{C_3}{2 \sin \alpha} \left[A_2 f_2(P_2) + 2 \frac{V}{P_2} l - A_1 f_1(P_1) + \frac{V}{P_1} l \right]$$

با فاکتورگیری از ضرایب نامعین A_1 , A_2 و V در رابطه اخیر معادله (۱۹) به دست می‌آید:

$$A_1 \left[-P_1 f_1(P_1) + C_1' g_1(P_1) - \frac{C_3}{2 \sin \alpha} f_1(P_1) \right]$$

$$+ A_2 \left[C_2' g_2(P_2) + \frac{C_3}{2 \sin \alpha} f_2(P_2) \right] \quad (19)$$

$$+ V \left[-\frac{C_1'}{P_1} + 2 \frac{C_2'}{P_2} + \frac{C_3}{2 \sin \alpha} \left(2 \frac{1}{P_2} l + \frac{1}{P_1} l \right) \right] = 0$$

با توجه به معادله (۱۲) و جایگذاری مقادیر در آن، می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2} P_2 A_2 f_2(P_2) = C_2' \left[A_1 g_1(P_1) - \frac{V}{P_1} \right]$$

$$+ C_1' \left[A_2 g_2(P_2) + 2 \frac{V}{P_2} \right] \quad (20)$$

$$- \frac{C_3}{\sin \alpha} \left[A_2 f_2(P_2) + 2 \frac{V}{P_2} l - A_1 f_1(P_1) + \frac{V}{P_1} l \right]$$

با فاکتورگیری جملات بر اساس ضرایب نامعین A_1 , A_2 و V در رابطه اخیر معادله (۲۱) حاصل می‌شود:

$$A_1 \left[C_2' g_1(P_1) + \frac{C_3}{2 \sin \alpha} f_1(P_1) \right]$$

$$+ A_2 \left[-\frac{1}{2} P_2 f_2(P_2) + C_1' g_2(P_2) - \frac{C_3}{2 \sin \alpha} f_2(P_2) \right] \quad (21)$$

$$+ V \left[-\frac{C_2'}{P_1} + 2 \frac{C_1'}{P_2} - \frac{C_3}{2 \sin \alpha} \left(2 \frac{1}{P_2} l + \frac{1}{P_1} l \right) \right] = 0$$



بنابراین:

$$C'_1 = C_1 - \frac{C_2^2}{2C_4} = 4 \frac{EI}{l} - \frac{\left(\frac{2EI}{l}\right)^2}{2\left(\frac{4EI}{l}\right)} = 3.5 \frac{EI}{l}$$

$$C'_2 = -\frac{C_2^2}{2C_4} = -0.5 \frac{EI}{l}$$

نتیجتاً با جایگذاری $\alpha = 30^\circ$ و $P_1 = EI\lambda_1^2$ و $P_2 = 2EI\lambda_2^2$ در معادلات درایه‌های ماتریس ضرایب (پیوست) مقادیر این درایه‌ها محاسبه می‌گردند:

$$K_{11} = \frac{EI}{l^2} [-(\lambda_1 l)^2 \sin \lambda_1 l + 3.5 \lambda_1 l \cos \lambda_1 l + 6 \sin \lambda_1 l];$$

$$K_{21} = \frac{EI}{l^2} [-0.5 \lambda_1 l \cos \lambda_1 l - 6 \sin \lambda_1 l];$$

$$K_{12} = \frac{EI}{l^2} [-0.5 \lambda_2 l \cos \lambda_2 l - 6 \sin \lambda_2 l];$$

$$K_{22} = \frac{EI}{l^2} [-(\lambda_2 l)^2 \sin \lambda_2 l + 3.5 \lambda_2 l \cos \lambda_2 l + 6 \sin \lambda_2 l]$$

با نامگذاری $\omega_1 = \lambda_1 l$ و $\omega_2 = \lambda_2 l$ می‌توان نوشت:

$$K = \frac{EI}{l^2} \begin{bmatrix} -\omega_1^2 \sin \omega_1 + 3.5 \omega_1 \cos \omega_1 + 6 \sin \omega_1 & -0.5 \omega_1 \cos \omega_1 - 6 \sin \omega_1 \\ -0.5 \omega_2 \cos \omega_2 - 6 \sin \omega_2 & -\omega_2^2 \sin \omega_2 + 3.5 \omega_2 \cos \omega_2 + 6 \sin \omega_2 \end{bmatrix}$$

اکنون با قرار دادن $|K| = 0$ ، حل این معادله با فرض برابری $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$\omega = 2.235 \quad \text{یا} \quad \omega = 1.192$$

بین جواب‌های به‌دست آمده، تنها مقدار $\omega = 1.192$ قابل قبول است (چون به‌دلیل آزاد بودن سوله در برابر حرکت جانبی، مقدار λl (آرگومان تابع سینوس در سر ستون) نمی‌تواند از مقدار $\pi/2$ بیش‌تر شود).

نتیجتاً:

$$P_1 = EI\lambda_1^2 = \frac{EI}{l^2} \omega^2 = 1.422 \frac{EI}{l^2}$$

$$P_2 = 2EI\lambda_2^2 = 2 \frac{EI}{l^2} \omega^2 = 2.844 \frac{EI}{l^2} = 2P_1$$

در این سوله‌ی دو دهانه با نصف کردن سوله از محل ستون میانی، دو سوله متقارن تک دهانه پدیدار می‌شود که ممان اینرسی ستون‌های هر دو سوله، همگی I خواهد بود. بنابراین بار بحرانی ستون‌های کناری در سوله دو دهانه برابر با بار بحرانی هر یک از ستون‌های سوله‌ی تک دهانه است و بار

در آخرین درایه (K_{33})، پارامتر h معرف ارتفاع راس‌های سوله نسبت به سر ستون‌هاست (شکل (۲)).

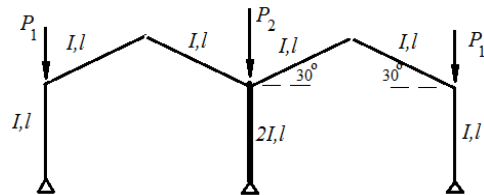
باید توجه داشت در حالتی که ممان اینرسی ستون میانی دو برابر ممان اینرسی ستون کناری باشد، مقدار نیروی برشی پای ستون‌ها، برای حالت کمانش هم‌زمان ستون‌ها صفر بوده، ماتریس K به یک ماتریس 2×2 تبدیل می‌شود. درایه‌هایی که برحسب توابع f و g است، برای ستون‌های منشوری به معادلاتی که در پیوست آمده است، تبدیل می‌شوند.

۴- مثال‌ها

در مثال‌های زیر، بار بحرانی ستون‌های دو دهانه مورد نظر خواسته شده است. حالت کمانش هم‌زمان سه ستون برای سازه‌هایی که این حالت در آن قابل تشخیص باشد، نیز بررسی شده است. نتایج حل دو مثال اول برای مقایسه با روش دیگران در جدول (۳) آمده است.

۴-۱- مثال ۱:

بار بحرانی ستون‌های سوله شکل (۴) ابتدا در حالت کمانش هم‌زمان سه ستون خواسته شده است، سپس حالت کمانش غیرهم‌زمان ستون‌ها نیز بررسی خواهد شد.



شکل ۴- سوله دو دهانه آزاد در برابر حرکت جانبی، با تکیه‌گاه‌های مفصلی و با اعضای منشوری و با طول‌های یکسان

۴-۱-۱- حل با روش پیشنهادی برای حالت کمانش هم‌زمان ستون‌ها:

در این مثال خاص ممان اینرسی ستون میانی دو برابر ممان اینرسی ستون کناری است، پس ماتریس K یک ماتریس 2×2 خواهد بود. انتظار می‌رود که بار بحرانی ستون میانی دو برابر بار بحرانی ستون کناری باشد، این حالت متناظر با کمانش هم‌زمان سه ستون است. برای محاسبه ضرایب G_i با توجه به معادلات (۲) و (۴) داریم:

$$C_1 = C_4 = 4 \frac{EI}{l}, \quad C_2 = 2 \frac{EI}{l}, \quad C_3 = C_5 = -6 \frac{EI}{l^2}$$

۴-۱-۲- حل با روش پیشنهادی برای حالت کماتش غیر هم‌زمان ستون‌ها:

چنانچه هدف، بررسی کماتش هم‌زمان ستون‌ها نباشد، می‌توان حالتی را در نظر گرفت که ستون میانی یا ستون‌های کناری کماتش کند و ستون (های) دیگر در وضعیت کماتش نباشد. در این حالت ممکن است در پای ستون‌ها نیروی برشی پدید آید و باید ماتریس K را به‌عنوان یک ماتریس 3×3 بررسی کرد. پس از تعیین درایه‌های این ماتریس می‌توان دترمینان آن را محاسبه و معادله $|K| = 0$ را تشکیل داد. بنابراین معادله‌ای حاصل می‌شود که بین $\lambda_1 l$ و $\lambda_2 l$ (و یا ω_1 و ω_2) برقرار است. غیر از درایه‌هایی که در بخش قبلی مثال به‌دست آمد، سایر درایه‌های این ماتریس در ادامه آمده است:

$$K_{13} = -l \left(\frac{9.5}{\omega_1^2} + \frac{6.5}{\omega_2^2} \right); \quad K_{23} = l \left(\frac{6.5}{\omega_1^2} + \frac{9.5}{\omega_2^2} \right)$$

$$K_{31} = \frac{EI}{l^2} \left(\frac{1}{2} \omega_1^2 \sin \omega_1 + \omega_1 \cos \omega_1 + 6 \sin \omega_1 \right);$$

$$K_{32} = \frac{EI}{l^2} \left(-\frac{1}{2} \omega_2^2 \sin \omega_2 - \omega_2 \cos \omega_2 - 6 \sin \omega_2 \right);$$

$$K_{33} = -7l \left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} \right) + \frac{l}{2}$$

حال با برقراری $|K| = 0$ و تعیین ریشه‌ها می‌توان جدول (۱) را تنظیم کرد.

جدول ۱- مقادیر λl (ω) برای ستون کناری (ردیف اول و دوم) و ستون میانی (ردیف سوم و چهارم) در هنگام ناپایداری سوله برای مثال ۱

۱/۶۳	۱/۵۵	۱/۵	۱/۴	۱/۳	۱/۲	۱/۱	۱/۰۵	۰/۹۵	۰/۸۵	۰/۷۵	۰/۰۰۱	$\omega_1 = \lambda_1 l$
۰/۰۰۱	۰/۵۸	۰/۷۲۵	۰/۹۲۵	۱/۰۷	۱/۱۸	۱/۲۷۵	۱/۳۲	۱/۳۸	۱/۴۵	۱/۴۹	۱/۶۳	$\omega_2 = \lambda_2 l$

دهانه مقدار G_T به صورت $G_T = \frac{I_0}{l} \sum \frac{b_T}{I_T}$ تعریف شده است. بنابراین ضریب طول موثر ستون‌های کناری و میانی محاسبه می‌شود (ضریب $\frac{3}{4}$ در روابط بعدی، ضریب اصلاح سختی حالت انتهای مفصلی به انتهای گیردار است):

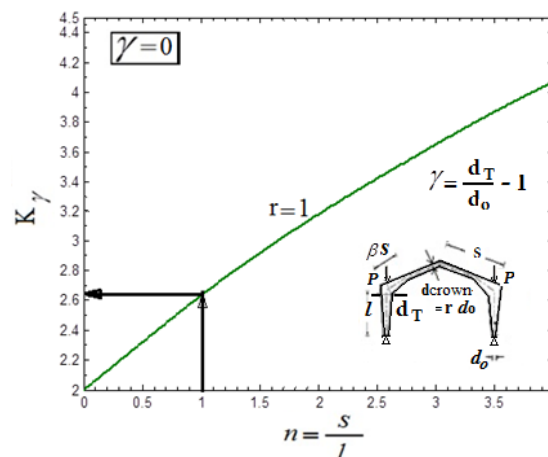
$$G_T = \frac{b_T I_0}{I_T} = \frac{II}{l \left(\frac{3}{4} I \right)} = 1.33$$

$$G_B = \infty \rightarrow K_\gamma = 2.4$$

$$\rightarrow P_1 = \frac{\pi^2 EI_{01}}{(K_\gamma l)^2} = \left(\frac{\pi}{2.4} \right)^2 \frac{EI}{l^2} = 1.71 \frac{EI}{l^2}$$

الف: ستون میانی:

بحرانی ستون میانی معادل با دو برابر بار بحرانی هر یک از ستون‌های مذکور است. پس می‌توان از نمودار ضریب طول موثر برای سوله تک دهانه استفاده کرد، با توجه به شکل (۵) و برابری طول تیر مورب با ارتفاع ستون، $n = s/l = 1$ خواهد بود.



شکل ۵- ضریب طول موثر ستون در سوله با حرکت جانبی آزاد و با اعضای منشوری ($\gamma = 0$) [۳۹]

$$K_\gamma = 2.63 \rightarrow P_1 = \frac{\pi^2 EI}{(2.63l)^2} \rightarrow$$

$$\omega = \lambda l = \sqrt{\frac{P}{EI}} l = \frac{\pi}{2.63} = 1.194$$

تنها، در حالت $\omega_1 = \omega_2 = 1.192$ است که هر سه ستون با هم ناپایدار می‌شوند. همچنانکه مشاهده می‌شود مقادیر ω_1 و ω_2 قابلیت جایگزینی دارند (در صورت جابجایی مقادیر ردیف اول و دوم باز هم تساوی $|K| = 0$ برقرار است) و این مسئله با توجه به تشکیل دو سوله متقارن تک دهانه از جداسازی سوله دو دهانه اولیه قابل انتظار است.

۴-۱-۳- روش مراجع [۳۱ و ۴۰]:

در این مراجع، قاب مستطیلی معادل با سوله دو دهانه ترسیم و ضریب طول موثر ستون‌های قاب معادل با کمک نمودارهای مربوط تعیین می‌گردد (شکل (۶)). برای ستون میانی سوله دو

میانی دو برابر ممان اینرسی ستون کناری در تمام مقاطع عرضی متناظر است، سوله تفکیک‌پذیر و قابل تبدیل به دو سوله تک دهانه خواهد بود و نتیجتاً ضریب طول موثر از شکل (۸) قابل حصول است.

$$n = \frac{s}{l} = \frac{6 \text{ m}}{4.5 \text{ m}} = 1.33, \quad r = \frac{d_{\text{crown}}}{d_0} = 1$$

$$\rightarrow K_\gamma = 1.60$$

بخاطر کماتش هم‌زمان سه ستون و یکسان بودن توابع جابجایی جانبی آن‌ها، مقدار K_γ برای هر دو ستون کناری و میانی یکسان و برابر با مقدار $1/60$ است، لیکن بار بحرانی ستون میانی دو برابر بار بحرانی ستون کناری است:

$$I_0 = \frac{1}{12} \times 1 \times 20.75^3 + \frac{1}{2} \times (20 \times 1.5) \times 20.75^2$$

$$= 7203 \text{ cm}^4$$

$$P_{1cr} = \frac{\pi^2 E I_0}{(K_\gamma l)^2} = \frac{\pi^2 \times 2e6 \times 7203}{(1.60 \times 450)^2} = 274270 \text{ kg}$$

$$P_{2cr} = 2P_{1cr} = 548540 \text{ kg}$$

۴-۲-۱- حل مثال با روش مراجع [۳۱ و ۴۰]:

در این دو مرجع، بار بحرانی برای قاب صلب مستطیلی معادل با سوله اولیه محاسبه می‌شود. قاب صلب دو تیر منشوری در بالا و پایین دارد که دو سر هریک به دو انتهای یک ستون متصل می‌شود (دو ستون و دو تیر).

الف- بار بحرانی ستون کناری:

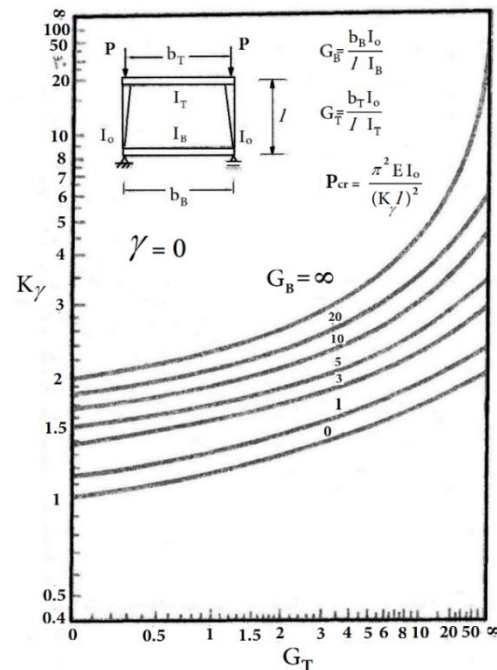
ممان اینرسی تیر منشوری بالایی قاب صلب فرضی با کمک شکل (۹) تعیین می‌شود. γ تیر مساوی با واحد است (نسبت عمق بزرگ به عمق کوچک منهای یک)، بخاطر متمرکز بودن نیرو در سر ستون‌ها، نیروی محوری در تیرها پدید نمی‌آید (در محور افقی شکل (۹)، $P = 0$ و پارامتر P_{exo} بار بحرانی ستون منشوری دو سر مفصلی است که از مقطع انتهای کوچکتر تیر مورب سوله و به طول آن ساخته شده است). ضمناً در سوله آزاد در برابر حرکت جانبی، راس آن در هنگام کماتش دچار دوران می‌شود (به طور محافظه کارانه می‌توان مفصل فرضی در نظر گرفت). یعنی نسبت سختی برداشت شده $2/9$ از شکل (۹)، باید با ضریب $3/4$ اصلاح شود (همچون بخش ۴-۲-۱، I_0 ممان اینرسی ستون کناری در پای آن است):

$$\gamma_b = \frac{d_{\text{max}}}{d_{\text{min}}} - 1 = 1 \rightarrow I_T = \frac{3}{4} \times 2.9 \times I_0 = 2.17 I_0$$

$$G_T = \frac{I_0}{l} \sum \frac{b_T}{I_T} = \frac{2I}{l} \times \left[\frac{l}{\left(\frac{3}{4}l\right)} + \frac{l}{\left(\frac{3}{4}l\right)} \right] = 5.33$$

$$G_B = \infty \rightarrow K_\gamma = 3.5$$

$$\rightarrow P_2 = \frac{\pi^2 E I_{02}}{(K_\gamma l)^2} = \left(\frac{\pi}{3.5}\right)^2 \frac{2EI}{l^2} = 1.61 \frac{EI}{l^2}$$



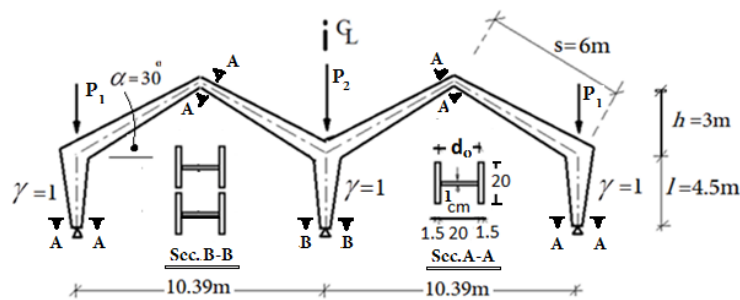
شکل ۶- ضریب طول موثر ستون در سوله با حرکت جانبی آزاد و با اعضای منشوری ($\gamma = 0$) [۳۱ و ۴۰]

۴-۲-۲- مثال ۲:

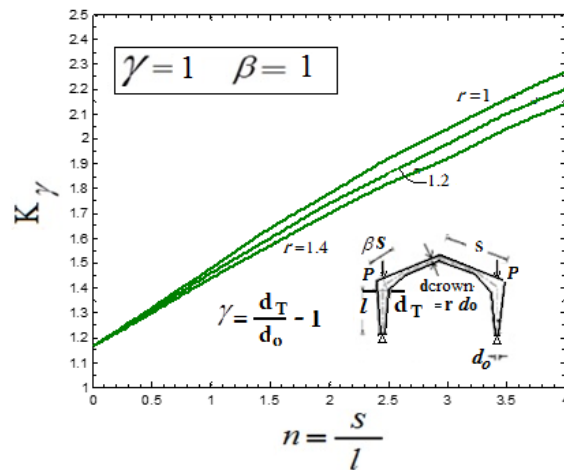
در سوله شکل (۷)، که تحت تاثیر بارهای P_1 و P_2 است، مقادیر این بارها را برای حالت ناپایداری سوله تعیین کنید (برای حالت آزاد در برابر حرکت جانبی). مقطع انتهای بزرگ همه‌ی تیرها با مقطع سر ستون‌های کناری یکسان است. مقطع ستون میانی از قرار دادن دو مقطع ستون کناری ساخته شده است.

۴-۲-۱- حل مثال با روش پیشنهادی:

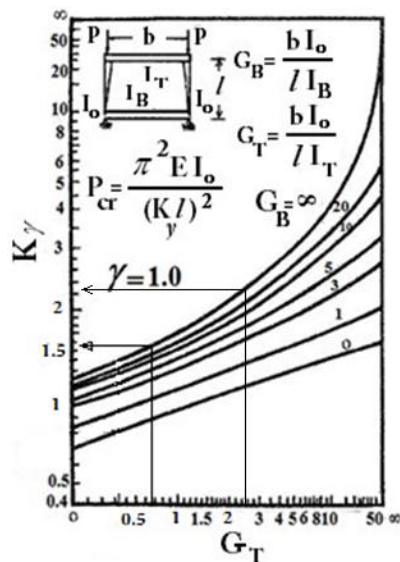
با نوشتن برنامه‌ای در نرم افزار MATLAB می‌توان بار بحرانی ستون‌های سوله دو دهانه را تعیین کرد. این کار براساس ساخت درایه‌های ماتریس ضرایب (معادلات (۲۵) تا (۳۳)) برای مقادیر متنوع مشخصات مکانیکی و هندسی سوله و نهایتاً ساخت معادله‌ی مشخصه کماتش با صفر کردن دترمینان ماتریس ضرایب انجام می‌گردد. در این مثال چون ممان اینرسی ستون



شکل ۷- سوله دو دهانه آزاد در برابر حرکت جانبی، با اعضای با مقطع متغیر

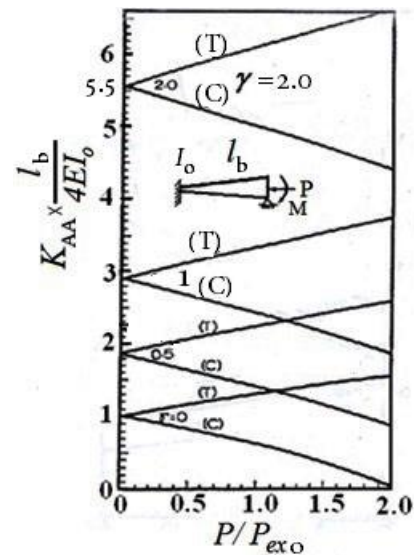


شکل ۸- ضریب طول موثر ستون با $\gamma = 1$ در سوله با حرکت جانبی آزاد و با تیرهای غیرمنشوری در تمام طول ($\beta = 1$)



شکل ۱۰- ضریب طول موثر ستون در سوله با حرکت جانبی آزاد و با

اعضای غیر منشوری ($\gamma = 1$) [۳۱ و ۴۰]



شکل ۹- نسبت سختی خمشی انتهای بزرگ تیر غیرمنشوری به تیر

منشوری که از مقطع انتهای کوچک و با طول یکسان

ساخته شده است [۳۱ و ۴۰]

حال باید از شکل (۱۰) استفاده کرد. مقدار G_B برای تکیه‌گاه مفصلی برابر با ∞ فرض می‌شود، ضمناً مقدار G_T با مقادیری که در ادامه می‌آید، برابر است.

ستون کناری:

$$G_T = \frac{bI_0}{lI_T} = \frac{600 \times I_0}{450 \times 2.17I_0} = 0.69, \quad G_B = \infty$$

$$\rightarrow K_Y = 1.58$$

$$\rightarrow P_{1cr} = \frac{\pi^2 \times 2e6 \times 7203}{(1.58 \times 450)^2} = 281256 \text{ kg}$$

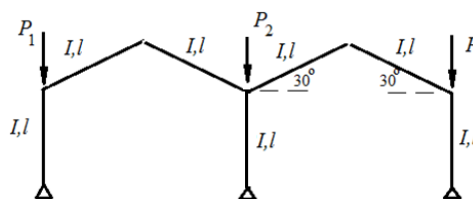
ستون میانی:

$$G_T = \frac{I_0}{l} \sum \frac{b_T}{I_T} = \frac{2I_0}{450} \times \left(\frac{600}{2.17I_0} + \frac{600}{2.17I_0} \right) = 2.46$$

$$K_Y = 2.22, \quad P_{2cr} = \frac{\pi^2 \times 2e6 \times 14406}{(2.22 \times 450)^2} = 284933 \text{ kg}$$

۳-۴- مثال ۳:

در شکل (۱۱)، بارهای P_1 و P_2 را که متناظر با وضعیت ناپایداری قاب است، تعیین کنید. سوله از اعضای منشوری، با طول و ممان اینرسی برابر ساخته شده است.



شکل ۱۱- سوله دو دهانه آزاد در برابر حرکت جانبی، با تکیه‌گاه‌های مفصلی و با اعضای دارای طول و ممان اینرسی برابر

۴-۳-۱- حل با روش پیشنهادی:

در این مثال خاص پارامترهای ممان اینرسی و طول برای تمامی اعضا یکسان است. در هنگام کماتش، وقوع نیروی برشی در پای ستون‌ها محتمل است، پس ماتریس K یک ماتریس 3×3 خواهد

بود. ضرایب C_i مشابه با مثال ۱، به دست می‌آیند:

$$C_1 = C_4 = 4 \frac{EI}{l}, \quad C_2 = 2 \frac{EI}{l}, \quad C_3 = C_5 = -6 \frac{EI}{l^2}$$

بنابراین:

$$C'_1 = 3.5 \frac{EI}{l}, \quad C'_2 = -0.5 \frac{EI}{l}$$

نتیجتاً با جایگذاری $\alpha = 30^\circ$ و $P_1 = EI\lambda_1^2$ و $P_2 = EI\lambda_2^2$ در مقادیر درایه‌های ماتریس ضرایب (معادلات (۲۵) تا (۳۳) و معادلات پیوست) داریم:

$$K_{11} = \frac{EI}{l^2} [-(\lambda_1 l)^2 \sin \lambda_1 l + 3.5 \lambda_1 l \cos \lambda_1 l + 6 \sin \lambda_1 l]$$

$$K_{12} = \frac{EI}{l^2} [-0.5 \lambda_2 l \cos \lambda_2 l - 6 \sin \lambda_2 l]$$

$$K_{13} = -l \left[\frac{9.5}{(\lambda_1 l)^2} + \frac{13}{(\lambda_2 l)^2} \right]$$

$$K_{21} = \frac{EI}{l^2} [-0.5 \lambda_1 l \cos \lambda_1 l - 6 \sin \lambda_1 l]$$

$$K_{22} = \frac{EI}{l^2} [-0.5 (\lambda_2 l)^2 \sin \lambda_2 l + 3.5 \lambda_2 l \cos \lambda_2 l + 6 \sin \lambda_2 l]$$

$$K_{23} = l \left[\frac{6.5}{(\lambda_1 l)^2} + \frac{19}{(\lambda_2 l)^2} \right]$$

$$K_{31} = \frac{EI}{l^2} [0.5 (\lambda_1 l)^2 \sin \lambda_1 l + \lambda_1 l \cos \lambda_1 l + 6 \sin \lambda_1 l]$$

$$K_{32} = \frac{EI}{l^2} [0.25 (\lambda_2 l)^2 \sin \lambda_2 l - \lambda_2 l \cos \lambda_2 l - 6 \sin \lambda_2 l]$$

$$K_{33} = -7l \left[\frac{1}{(\lambda_1 l)^2} + \frac{2}{(\lambda_2 l)^2} \right] + \frac{l}{2}$$

پس از دترمینان‌گیری از ماتریس K و برابری دترمینان با صفر، مقادیر P_1 و P_2 حاصل می‌شوند که نتایج در جدول (۲) آمده‌است.

برای مقایسه مقادیر نیروی محوری ستون‌ها برای حالت ناپایداری قاب در مثال‌های ۱ و ۲ جدول (۳) ترتیب داده شده است. برای نمایش هماهنگی نتایج و مشاهده اختلاف بین آن‌ها، مقادیر بار بحرانی بر حسب EI/l^2 آورده شده‌است.

جدول ۲- مقادیر $\omega \lambda l$ برای ستون کناری (ردیف اول و دوم) و ستون میانی (ردیف سوم و چهارم) در هنگام ناپایداری سوله برای مثال ۳

۱/۵	۱/۴	۱/۳	۱/۲	۱/۱	۰/۴	۰/۰۰۱	$\omega_1 = \lambda_1 l$
۰/۴۷	۰/۹	۱/۱۳	۱/۳۲	۱/۴۵	۱/۹	۱/۹۵	$\omega_2 = \lambda_2 l$



جدول ۳- مقادیر λl (ω) برای ستون کناری (ردیف اول و دوم) و ستون میانی (ردیف سوم و چهارم) در هنگام ناپایداری سوله برای مثال ۳

مقادیر نیروی محوری ستون‌ها در مثال‌های ۱ و ۲ با روش‌های مختلف

P_2 (ستون کناری مثال ۲)	P_1 (ستون کناری مثال ۲)	P_2 (ستون کناری مثال ۱)	P_1 (ستون کناری مثال ۱)	
$3/855 \times \frac{EI_0}{l^2}$ $= 548540 \text{ kg}$	$3/855 \frac{EI_0}{l^2}$ $= 274270 \text{ kg}$	$2/844 \frac{EI}{l^2}$	$1/422 \frac{EI}{l^2}$	روش پیشنهادی (کمانش هم‌زمان ستون‌ها)
$2/002 \times \frac{EI_0}{l^2}$ $= 284933 \text{ kg}$	$3/954 \frac{EI_0}{l^2}$ $= 281256 \text{ kg}$	$1/610 \frac{EI}{l^2}$	$1/71 \frac{EI}{l^2}$	مراجع [۳۱ و ۴۰]

برای حالتی که ستون‌های کناری و میانی منشوری هستند، در

ادامه آمده است $(\lambda_i = \sqrt{P_i/(EI_{ci})})$:

$$K_{11} = -P_1 \sin \lambda_1 l + C'_1 \lambda_1 \cos \lambda_1 l - \frac{C_3}{2 \sin \alpha} \sin \lambda_1 l$$

$$K_{12} = C'_2 \lambda_2 \cos \lambda_2 l + \frac{C_3}{2 \sin \alpha} \sin \lambda_2 l$$

$$K_{21} = C'_2 \lambda_1 \cos \lambda_1 l + \frac{C_3}{2 \sin \alpha} \sin \lambda_1 l$$

$$K_{22} = -\frac{1}{2} P_2 \sin \lambda_2 l + C'_1 \lambda_2 \cos \lambda_2 l - \frac{C_3}{2 \sin \alpha} \sin \lambda_2 l$$

$$K_{31} = -\frac{1}{2} P_1 \sin \lambda_1 l + \frac{C_2}{2} \lambda_1 \cos \lambda_1 l - \frac{C_5}{2 \sin \alpha} \sin \lambda_1 l$$

$$K_{32} = -\frac{1}{4} P_2 \sin \lambda_2 l - \frac{C_2}{2} \lambda_2 \cos \lambda_2 l + \frac{C_5}{2 \sin \alpha} \sin \lambda_2 l$$

۹- مراجع

- [1] Timoshenko, S.P. (1908), "Buckling of Bars of Variable Cross Section", Bulletin of the Polytechnic Institute, Kiev, USSR.
- [2] Morley, A. (1917), "Critical Loads for Long Tapering Struts", Engineering (London), Vol. 104, 295-298.
- [3] Dinnik, A.N. (1932), "Design of Columns of Varying Cross-Section", Transactions of the ASME, Applied Mechanics, Vol. 54, pp. 165-171.
- [4] Gere, J.M. and Carter W.O. (1962), "Critical Buckling Loads for Tapered Columns", Journal of Structural Division, ASCE; Vol. 88, pp. 1-12.
- [5] Iremonger, M.J. (1980), "Finite Difference Buckling Analysis of Non-Uniform Columns", Computers & Structures; Vol. 12, pp. 741-748.
- [6] Karabalis, D.L. and Beskos, D.E. (1983), "static, Dynamic and Stability Analysis of Structures Composed of Tapered Beams", Computers & Structures, Vol. 16, pp. 731-748.
- [7] Brown, C.J. (1984), "Approximate Stiffness Matrix for Tapered Beams", Journal of Structural Engineering, Vol. 110, pp. 3050-3055.
- [8] Ermopoulos, J.C. and Kounadis, A.N. (1985), "Stability of Frames with Tapered Built-up Members", Journal of Structural Engineering, Vol. 111, pp. 1979-1992.
- [9] Ermopoulos, J.C. (1986), "Buckling of Tapered Bars under Stepped Axial Loads", Journal of Structural Engineering,

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله محاسبه بار بحرانی کمانش خمشی ارتجاعی بر اساس تعیین ضریب طول موثر برای ستون‌های سوله‌های دو دهانه‌ای آزاد در برابر حرکت جانبی ارائه شده است. روش کار بدین صورت انجام شد که با کمک معادلات تعادل لنگر و شیب افت، رابطه بین مقادیر لنگر، نیروی برشی و تغییرشکل‌های گرهی سر ستون‌ها به دست آمد، سپس با کمک حل معادله دیفرانسیل تغییرشکل ستون‌ها، عباراتی برای بیان تغییرشکل‌های گرهی سر ستون‌ها بر اساس ضرایب نامعین حاصل شد. از تلفیق معادلات حاصل شده، دستگاه معادلات خطی حاوی سه معادله و سه ضریب نامعین به دست آمد. این دستگاه معادله به صورت معادله ماتریسی بیان شد. از برابری دترمینان ماتریس ضرایب با صفر معادله‌ای (معادله مشخصه) حاصل شد که کم‌ترین ریشه‌ی آن بار بحرانی ستون متناظر است. چون ضریب طول موثر پارامتری بی‌بعد است، برای رسم نمودارها مناسب‌تر از پارامتر بار بحرانی است. بنابراین برای کاربردی کردن نتایج، نمودارهای تعیین ضریب طول موثر ترسیم شد. نهایتاً برای صحت سنجی نتایج، مثال‌هایی حل شد. با توجه به متن مقاله و مثال‌های حل شده، نتایج زیر حاصل می‌شود:

- روش به کار رفته را می‌توان با تغییر فرمول بندی در سایر سازه‌ها با اشکال هندسی دیگر استفاده کرد.
- روش به کار رفته بدون تقریب و با کمک حل تحلیلی معادله دیفرانسیل انجام شده‌است، بنابراین به نتایج با دقت بالا منجر می‌شود.
- بار بحرانی هر ستون از یک قاب تفکیک‌ناپذیر، وابسته به نیروی محوری سایر ستون‌هاست، این مساله در سایر مراجع مورد توجه قرار نگرفته‌است.

۷- پیوست

درایه‌هایی از ماتریس ضرایب که برحسب توابع f و g است



- [26] Wei, D.J., Yan, S.X., Zhang, Z.P. and Li, X.F. (2010), "Critical Load for Buckling of Non-Prismatic Columns under Self-Weight and Tip Force", *Mechanics Research Communications*, Vol. 37, pp. 554-558.
- [27] Taha, M. and Essan, M. (2013), "Stability Behavior and Free Vibration of Tapered Columns with Elastic End Restraints using the DQM Method", *Ain Shams Engineering Journal*, Vol. 4, pp. 515-521.
- [28] Shooshtari, A. and Khajavi, R. (2010), "An Efficient Procedure to Find Shape Functions and Stiffness Matrices of Nonprismatic Euler-Bernoulli and Timoshenko Beam Elements", *European Journal of Mechanical A/Solids*, Vol. 29, pp. 826-836.
- [29] Ruocco, E., Zhang, H. and Wang, C.M. (2016), "Hencky Bar-Chain Model for Buckling Analysis of Non-Uniform Columns", *Structures*, Vol. 6, pp. 73-84.
- [30] Nikolic, A. and Šalinic, S. (2017), "Buckling Analysis of Non-Prismatic Columns: A Rigid Multibody Approach", *Engineering Structures*, Vol. 143, pp. 511-521.
- [31] Lee, G.C., Morrell, M.L., and Ketter, R.L. (1972), "Design of Tapered Members", *Bulletin No. 173, Welding Research Council*.
- [32] Irani, F. (1988), "Stability of One Bay Symmetrical Frames with Non-Uniform Members", *Journal of Engineering Islamic Republic of Iran*, Vol. 1, pp. 193-200.
- [33] Bazeos, N. and Karabalis, D.L. (2006), "Efficient Computation of Buckling Loads for Plane Steel Frames with Tapered Members", *Engineering structures*, Vol. 28, pp. 771-775.
- [34] Saffari, H., Rahgozar, R. and Jahanshahi, R. (2008), "An Efficient Method for Computation of Effective Length Factor of Columns in a Steel Gabled Frame with Tapered Members", *Journal of constructional steel Research*, Vol. 64, pp. 400-406.
- [35] -مومنی، ع.م. و تاجی زادگان، ر. (۱۳۸۷)، "توسعه روابط شیب-افت و استفاده از آنها جهت بدست آوردن ضریب طول موثر و بار بحرانی"، چهارمین کنگره ملی مهندسی عمران، دانشگاه تهران.
- [36] Tajmir Riahi, H., Shojaei Barjoui, A., Bazazzadeh, S. and Etezady, S.M.A. (2012), "Buckling Analysis of Non-Prismatic Columns using Slope-Deflection Method", *Lisboa, World Conference on Earthquake Engineering*.
- [37] Rezaiee-Pajand, M., Shahabian, F. and Bambaeechee, M. (2016), "Stability of Non-Prismatic Frames with Flexible Connections and Elastic Supports", *KSCE Journal of Civil Engineering*, Vol. 20, pp. 832-846.
- [38] صفوی، ع.ا.، حق اللهی، ع. و محمودی صاحبی، م. (۱۳۹۴)، "بار کمانش خمشی ارتجاعی ستون‌های با مقطع متغیر در قاب‌های شیب‌دار آزاد در برابر حرکت جانبی با روش‌های تفاضلات محدود و کار مجازی"، *مجله علمی پژوهشی سازه و فولاد*، دوره ۱۱، شماره ۱۸، ص. ۶۷-۷۱.
- [39] صفوی، ع.ا. (۱۳۸۵)، "تعیین ضریب طول موثر اعضای با مقطع متغیر در قاب‌های شیب‌دار"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس.
- [40] American Institute of Steel Construction (AISC), (1999), *Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Building*, AISC, Chicago.
- Vol. 112, pp. 1346-1354.
- [10] Banerjee, J.R. and Williams, F.W. (1986), "Exact Bernoulli-Euler Static Stiffness Matrix for a range of tapered beam-columns", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, pp. 1615-1628.
- [11] Yang, Y.B. and Yau, J.D. (1987), "Stability of Beams with Tapered I-Sections", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 113, pp. 1337-1357.
- [12] Bradford, M.A. (1988), "Elastic Buckling of Tapered Monosymmetric I-Beams", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 114, pp. 977-996.
- [13] Williams, F.W. and Aston, G. (1989), "Exact or Lower Bound Tapered Columns Buckling Loads", *ASCE*, Vol. 115, pp. 1088-1100.
- [14] Al-Gahtani, H.J. (1996), "Exact Stiffnesses for Tapered Members", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 122, pp. 1234-1239.
- [15] Lei, Z. and Shu, T.G. (2008), "Lateral Buckling of Web-Tapered I-Beams: A New Theory", *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 64, pp. 1379-1393.
- [16] Yau, J.D. (2006), "Stability of Tapered I-Beams under Torsional Moments", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 42, pp. 914-927.
- [17] Asgarian, B., Soltani, M. and Mohri F. (2013), "Lateral-Torsional Buckling of Tapered Thin-Walled Beams with Arbitrary Cross-Sections", *Thin-Walled Structures*, Vol. 62, pp. 96-108.
- [18] Soltani, M., Asgarian, B. and Mohri, F. (2014), "Elastic Instability and Free Vibration Analyses of Tapered Thin-Walled Beams by the Power Series Method", *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 96, pp. 106-126.
- [19] Soltani, M., Asgarian, B. and Mohri, F. (2014), "Finite Element Method for Stability and Free Vibration Analyses of Non-Prismatic Thin-Walled Beams", *Thin-Walled Structures*, Vol. 82, pp. 245-261.
- [20] Kováč, M. (2012), "Lateral-Torsional Buckling of Web-Tapered I-Beams. 1D and 3D FEM Approach", *Steel Structures and Bridges, Procedia Engineering*, Vol. 40, pp. 217-222.
- [21] Rahai, A.R. and Kazemi, S. (2008), "Buckling Analysis of Non-Prismatic Columns Based on Modified Vibration Modes", *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 13, pp. 1728-1735.
- [22] Bradford, M.A. and Valipour, H.R. (2012), "A New Shape Function for Tapered Three- Dimensional Beams with Flexible Connections", *Journal of constructional steel Research*, Vol. 70, pp. 43-50.
- [23] Konstantakopoulos, T.G., Raftoyiannis, I.G. and Michaltsos, G.T. (2012), "Stability of Steel Columns with Non-Uniform Cross-Sections", *The Open Construction and Building Technology Journal*, Vol. 6, pp. 1-7.
- [24] Darbandi, S.M., Firouz-Abadi, R.D. and Haddadpour, H. (2010), "Buckling of Variable Section Columns under Axial Loading", *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 136, pp. 472-476.
- [25] Hadidi, A., Azar, B.F. and Zonoudi Marand, H. (2014), "Second-Order Nonlinear Analysis of Steel Tapered Beams Subjected to Span Loading", *Advances in Mechanical Engineering*, Vol. 6, PP. 1-10.

پی نوشت

¹ Differential quadrature method (DQM)

² Hencky bar model

³ Multiple rigid rods

