

تعیین نقطه‌های حدی سازه‌ها با روش رهایی پویا

حسین استیری^{۱*}، امیر باغبان^۲

۱- استادیار، مهندسی عمران، مجتمع آموزش عالی گناباد، گناباد

۲- استادیار، مهندسی عمران، مجتمع آموزش عالی گناباد، گناباد

*گناباد، صندوق پستی ۹۶۹۱۹۵۷۶۷۸، h.estiri@gonabad.ac.ir

چکیده

با افزایش قدرت پردازش رایانه‌ها، راهکارهای حل عددی و تقریبی سازه‌ها گسترش یافت. رهایی پویا یکی از این روش‌ها است. این شیوه، فن صریح حل دستگاه معادله‌های هم‌زمان می‌باشد. در این راه‌حل، مسأله‌ی سازه‌ی ایستا را به فضای پویا انتقال می‌دهند. جرم و میرایی ساختگی را در روش رهایی پویا به سامانه‌ی معادله‌های سازه‌ی ایستا می‌افزایند تا یک دستگاه پویای ساختگی به دست آید. آگاهی از چگونگی رفتار سازه‌ها، به مسیر ایستایی آن‌ها در فضای نیرو-تغییر مکان وابسته است. این مسیر، نقطه‌های بحرانی و کم‌انرژی را در سازه‌های با رفتار ناخطی مشخص می‌کند. برای برآورد نقاط بحرانی سازه‌ها با فرایند رهایی پویا، از ضریب بار متغیر بهره‌جویی می‌شود. در این مقاله، با کمینه کردن هم‌زمان کار خارجی و انرژی جنبشی، راهکار نوینی برای یافتن عامل بار پیشنهاد خواهد شد. رابطه‌ی نویسندگان برای نمو ضریب بار، فقط به عامل‌های ساختگی فن رهایی پویا وابسته می‌باشد. برای نشان دادن شایستگی روش جدید، چندین سازه، مانند خرپاها، قاب‌ها و پوسته‌ها تحلیل ناخطی هندسی می‌شوند. پاسخ‌های عددی، کارایی مناسب راهکار پیشنهادی را برای محاسبه‌ی نقاط بحرانی مسیر ایستایی سازه‌ها نشان می‌دهند.

واژگان کلیدی

رهايي پویا، مسیر ایستایی، کار خارجی، انرژی جنبشی، نقطه‌های حدی

Finding limit points by dynamic relaxation method

H. Estiri, A. Bagban

Abstract

The numerical structural analysis schemes are extensively developed by progress of modern computer processing power. One of these approximate approaches is called Dynamic Relaxation (DR) method. This technique explicitly solves the simultaneous system of equations. For analyzing the static structures, the DR strategy transfers the governing equations to the dynamic space. By adding the fictitious damping and mass to the static equilibrium equations, the corresponding artificial dynamic system is achieved. The static equilibrium path is required in order to investigate the structural stability behavior. This path shows the relationship between the loads and the displacements. In this way, the critical points and buckling loads of the nonlinear structures can be obtained. The corresponding load to the first limit point is known as buckling limit load. For estimating the buckling load, the variable load factor is used in the DR process. A new procedure for finding the load factor is presented by minimizing external work and kinetic energy, simultaneously. The proposed formula only requires the fictitious parameters of the DR scheme. To prove the efficiency and robustness of the suggested algorithm, various geometric nonlinear analyses are performed. Several trusses, frames and shells structures with nonlinear geometrically behavior is analyzed. The obtained results demonstrate that the new method can successfully estimate the buckling limit load of structures.

Keywords

Dynamic relaxation, Equilibrium path, External work, Kinetic energy, Limit points

پایداری یک سازه می‌تواند با برآورد نیروی بحرانی آن تحلیل شود. به‌طور معمول، برای یافتن بار بحرانی، به حل مسأله‌ی مقدارهای ویژه می‌پردازند [۱]. در این‌گونه تحلیل، نیروها به گونه‌ای به‌دست می‌آیند که ماتریس سختی سازه ویژه شود. به سخن دیگر، دترمینان آن صفر گردد. خاطر نشان می‌کند، این شیوه برای سازه‌های بزرگ بسیار زمان‌بر است و مناسب نمی‌باشد [۲]. روش دیگر، بهره‌جویی از مسیر ایستایی سازه‌ها است. در این فن و در بیش‌تر موارد، بیشینه نیرو پیش از نخستین نقطه‌های حدی بار و تغییر مکان، نیروی کمانشی شناخته می‌شود [۳-۶]. سه گونه منحنی نیرو- جابه‌جایی برای پاسخ سازه‌ها وجود دارد. در یکی از آن‌ها هیچ کمانشی روی نمی‌دهد. در گونه‌ی دیگری از آن‌ها، نقطه‌ی کمانش حدی قرار دارد. با وجود این، نقطه‌ی چند شاخگی در آن نیست. در گونه‌ی آخر، کمانش نقطه‌ی حدی و کمانش چند شاخگی وجود دارند. در این حالت، کمانش نقطه‌ی حدی می‌تواند پیش یا پس از کمانش چند شاخگی باشد [۴]. نقطه‌های چند شاخگی بیش‌تر در سازه‌های با نقص اولیه روی می‌دهند [۶].

روش‌های تکراری به دو دسته‌ی صریح و ضمنی تقسیم می‌شوند. اگر از نیروی داخلی برای رسیدن به پاسخ استفاده کنند، راه‌کار صریح است. بنابراین، همه‌ی کارهای ریاضی این فن برداری هستند. سادگی و کارایی زیاد، مهم‌ترین ویژگی‌های این راه حل‌ها می‌باشند. از سوی دیگر، شیوه‌های ضمنی، بر پایه‌ی ماتریس سختی رابطه‌سازی می‌گردند. به‌دلیل بهره‌جستن از عملگرهای ماتریسی، محاسبه‌های راه‌کارهای ضمنی پیچیده و زمان‌بر هستند. برای نمونه، نقطه‌های حدی بار و تغییر مکان، که در آن‌ها ماتریس سختی صفر و یا تعریف نشده‌اند، سبب بروز مشکل در این فرآیندها می‌گردد. باید دانست، نرخ همگرایی شیوه‌های ضمنی بیش‌تر از روش‌های صریح است [۷].

پژوهشگران، فن‌های گوناگونی برای تحلیل ناخطی و پیمایش مسیر ایستایی سازه‌ها پیشنهاد کرده‌اند. کرنک و همدال برای تحلیل ناخطی سازه‌ها، روش‌های تعاملی را با راه‌حل‌های شبه نیوتنی به‌کار بردند [۸]. Rezaiee-Pajand و Boroshaki از راه‌کار طول قوس متغیر برای حل ناخطی رفتار سازه‌ها بهره‌جستند [۹]. Kim و Kim با شبکه‌های عصبی و فن نیوتن-رافسون به تحلیل ناخطی سازه‌ها پرداختند [۱۰]. Toklu برپایه‌ی فرآیند بهینه‌سازی و بهره‌جویی از کمینه ساختن انرژی پتانسیل کل سازه، تحلیل ناخطی خرابی‌ها را انجام داد [۱۱]. Ligarò و Valvo با کمینه کردن انرژی پتانسیل کل، رابطه‌ی تحلیلی برای

رفتار ناخطی خرابی هر می منظم نوشتند [۱۲]. Saffari و Mansouri راه‌کار دو نقطه‌ای را برای حل معادله‌های ناخطی حاکم بر رفتار سازه‌ها پیشنهاد کردند [۱۳]. این فن که با شیوه‌ی نیوتن-رافسون مقایسه شده است، نمی‌تواند از نقطه‌های حدی بار گذر کند.

اثرهای علمی چاپ شده نشان می‌دهند که هنوز هم پژوهشگران به روش مناسبی دست نیافتند که بتواند هرگونه خم ایستایی را پیماید. به سخن دیگر، تواناترین شیوه‌های تحلیل ناخطی سازه‌ها در پاره‌ای از حالت‌ها شکست می‌خورند و دخالت تحلیل‌گر در پیشبرد کار لازم است. یکی از روش‌های تحلیل ناخطی سازه‌ها، رهایی پویا است. این شیوه در دسته‌ی فرآیندهای صریح جای دارد. هدف این مقاله، یافتن رابطه‌ای در شیوه رهایی پویا می‌باشد که توانایی پیمایش مسیر ایستایی و تعیین نقاط بحرانی را دارد. در این مقاله، با کمینه کردن هم‌زمان کار خارجی و انرژی جنبشی، رابطه‌ی نوینی برای عامل بار پیشنهاد می‌گردد. نخست، پایه‌های روش رهایی پویا و رابطه‌های آن می‌آیند. سپس، به راه‌کارهای پیشینان برای پیمایش مسیر ایستایی پرداخته می‌شود. در ادامه، شیوه‌ی نوینی برای به دست آوردن عامل بار رابطه‌سازی می‌گردد. این کار با بهره‌جویی هم‌زمان کار خارجی و انرژی جنبشی انجام می‌پذیرد. برای رسیدن به این هدف، مجموع دو عامل فوق، بر اساس پارامترهای شیوه‌ی رهایی پویا نوشته می‌شود. با کمینه کردن این مجموع، رابطه‌ی جدیدی برای ضریب بار به دست می‌آید. ضریب بار پیشنهادی فقط به عامل‌های ساختگی رابطه‌سازی‌های رهایی پویا وابسته می‌باشد. از این عامل بار برای پیمایش مسیر ایستایی و تعیین نقاط حدی بهره‌جویی می‌شود. سرانجام، با حل نمونه‌های عددی و استفاده از سه گونه معیار، توانایی راه‌حل پیشنهادی با دیگر شیوه‌های پژوهشگران مقایسه می‌شود.

۲- روش رهایی پویا

با بهره‌جویی از تفاوت‌های محدود مرکزی، رابطه‌های پایه‌ای رهایی پویا به‌دست می‌آیند. برابری‌های زیر آن‌ها را نشان می‌دهند [۱۴].

$$\ddot{X}_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2m_{ii}^n - C_{ii}^n t^n}{2m_{ii}^n + C_{ii}^n t^n} \ddot{X}_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{2t^n}{2m_{ii}^n + C_{ii}^n t^n} (p_i^n - f_i^n), \quad i = 1, 2, \dots, ndof \quad (1)$$

$$X_i^{n+1} = X_i^n + \delta X_i^n = X_i^n + t^{n+1} \dot{X}_i^{n+\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2, \dots, ndof \quad (2)$$



نمادهای m_{ii}^n ، C_{ii}^n ، t^n و f_i^n به ترتیب، درایه ی قطری $\mathbf{M}$ از ماتریس های جرم و میرایی ساختگی، گام زمانی مجازی و درایه $\mathbf{M}$ از بردار نیروی داخلی در تکرار m م رهایی پویا می باشند. بارخارجی دستگاه ایستا و شمار درجه های آزادی سامانه، به ترتیب، با p_i^n و $ndof$ نمایش داده شده اند. افزون بر این، بردارهای δX ، X و $\dot{X}$ ، به ترتیب، نمو تغییر مکان، جابه جایی و سرعت هستند. یکی از ویژگی های رهایی پویا، صریح بودن آن است. به سخن دیگر، فرایند حل تنها با کارگرهای برداری انجام می شود. این رفتار به سبب قطری پنداشتن ماتریس های جرم و میرایی می باشد. خاطر نشان می کند، رابطه های (۱) و (۲) تا رسیدن به خطای پذیرفتنی تکرار می گردند. ماتریس های جرم و میرایی در پایداری فرایند رهایی پویا نقش اساسی دارند. افزون بر این، گام زمانی نیز در افزایش نرخ همگرایی اثر دارد. در ادامه، به چکیده ای از کارهای پژوهشگران در برآورد عامل های ساختگی رهایی پویا پرداخته می شود.

Munjiza و همکارانش، میرایی را متناسب با توانی از ماتریس های جرم و سختی به کار گرفتند. آن ها نشان دادند که هرگاه ماتریس میرایی به شکل $2M(M^{-1}S)^{0.5}$ باشد، تمامی حالت ها به صورت بحرانی میرا می شوند [۱۵ و ۱۶]. در این جا، عامل های S و M ، به ترتیب، ماتریس های سختی و جرم هستند. برای کاهش تکرارها و با هدف افزایش مرتبه ی خطا و به دنبال آن، بهبود نرخ همگرایی رهایی پویا، Rezaiee-Pajand و Taghavian Hakkak از گسترش دنباله ی تیلور بهره جستند. آن ها از سه جمله ی نخست دنباله ی تیلور، جابه جایی را به دست آوردند [۱۷]. این پژوهشگران، مقدار گام زمانی در تکرارهای رهایی پویا را ثابت پنداشتند. بهبود گام زمانی ساختگی، بر پایه ی کمینه سازی نیروهای نامیزان در تکرارهای رهایی پویا، به وسیله ی Kadkhodayan و همکارانش رابطه سازی شد [۱۸]. روش رهایی پویا برای تحلیل دینامیکی ناخطی را Rezaiee-Pajand و Alamatian به کار بردند [۱۹]. آن ها، این راه حل را با گام زمانی بهبود یافته به کار بردند. شیوه ی آن ها خطاهای تابع اولیه گیری را کاهش می دهد.

پیوند نسبت گام زمانی بهینه و میرایی بحرانی در تحلیل های ناخطی با فن رهایی پویا، توسط Rezaiee-Pajand و Sarafrazi به دست آمد [۲۰]. این پژوهش آشکار کرد که مقدار گام زمانی ثابت اثری بر نرخ همگرایی ندارد. Rezaiee-Pajand و Alamatian رابطه های جدیدی برای میرایی و جرم ساختگی برقرار نمودند [۲۱]. راه کار آن ها نشان داد که می توان بدون انجام کارهای عددی بیشتر نرخ همگرایی را بالا برد. افزون بر

این ها، روش نوینی برای حساب کردن میرایی ساختگی را رضایی پزند و همکاران به چاپ رسانیدند [۲۲]. برای رسیدن به این هدف، می توان از کمینه نمودن خطا بین دو گام پیاپی و استفاده از فرایند تکراری بهره جست. با وارد کردن مقدار صفر برای میرایی و یافتن نسبت گام زمانی آن، Rezaiee-Pajand و Sarafrazi روش دیگری را رابطه سازی کردند [۲۳]. آن ها به تحلیل دینامیکی ناخطی سازه ها نیز پرداخته اند. افزون بر این ها، بر پایه ی انرژی نامیزان، روش جدیدی به دست آمد [۲۴]. Rezaiee-Pajand و همکارانش، کارایی دوازده روش رهایی پویا را برای تحلیل اجزای محدودی سازه های قابی و خرابایی بررسی کردند [۲۵]. Rezaiee-Pajand و Rezaee گام زمانی نوینی برای رهایی پویای جنبشی برپا نهادند [۲۶]. Alamatian رابطه ی جدیدی برای برآورد جرم ساختگی در رهایی پویای جنبشی پیشنهاد کرد [۲۷]. Namadchi و Alamatian، رهایی پویا را برای تحلیل دینامیکی سازه ها به کار گرفتند [۲۸]. Rezaiee-Pajand و همکارانش، در یک مقاله ی مروری، رابطه سازی های گوناگون شیوه ی رهایی پویا را بررسی کردند [۲۹]. ایشان، در مقاله ی مروری دیگری، کاربردهای این راه حل را در تحلیل سازه هایی مانند صفحه های خمشی، کابل ها، ساختارهای پارچه ای و غیره نوشتند [۳۰]. Jung و همکارانش برپایه ی میرایی جنبشی پیوسته، گام زمانی دیگری برآورد نمودند [۳۱]. Sarafrazi و Labafi، میرایی متمرکز را در روش رهایی پویای جنبشی به کار بردند [۳۲]. Zardi و Alamatian، براساس نگره ی گرشگورین انتقال یافته، رابطه ای برای جرم پیشنهاد کردند [۳۳]. Abbasi و همکارانش، برپایه ی درونپایی لاگرانژی، روش رهایی پویا را بهبود دادند [۳۴]. در ادامه، رابطه های یافتن عامل های ناشناخته ی جرم و میرایی می آید.

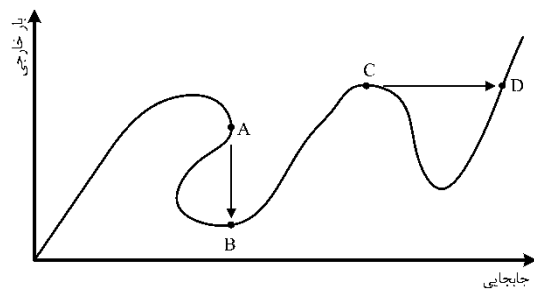
یکی از رابطه های پرکاربرد در یافتن ماتریس جرم، شیوه ی Underwood می باشد [۱۴]. وی برابری (۳) را پیشنهاد کرد. ایشان مقدار گام زمانی را برابر با ۱/۱ پنداشت.

$$m_{ii} = \frac{(t^n)^2}{4} \sum_{j=1}^{ndof} |S_{ij}| \quad (3)$$

این رابطه آشکار می کند که مقدار جرم ساختگی هر گره در هر تکرار، با استفاده از حاصل جمع ردیفی قدر مطلق درایه های ماتریس سختی به دست می آید. با کمینه کردن خطای تغییر مکان در دو تکرار پیاپی و استفاده از نگره ی گرشگورین، درایه های جرم ساختگی به صورت رابطه ی (۴) به دست می آیند [۲۱]:

$$m_{ii} = \max \left[\frac{(t^n)^2}{2} S_{ii}, \frac{(t^n)^2}{4} \sum_{j=1}^{ndof} |S_{ij}| \right] \quad (4)$$

ناحیه‌های بازگشتی، باید بار خارجی متغیر در روش رهایی پویا وارد گردد.



شکل ۱- روش رهایی پویای متداول در ناحیه‌های بازگشتی

با بهره‌جویی از معیارهای پایداری و روش رهایی پویا، Kadkhodayan و همکارانش به تحلیل کمانشی و پس کمانشی صفحه‌ها پرداختند [۳۶]. از سوی دیگر، Ramesh و Krishnamoorthy با بهره‌جویی از نمو جابه‌جایی در تکرارهای رهایی پویا، ناحیه‌های بازگشتی بار را پیمودند [۳۷]. این فرآیند در هنگام بازگشت تغییر مکان کارایی ندارد. این پژوهش‌گران برای برطرف کردن این کاستی، راه‌کار طول قوس متغیر را با شیوه‌ی رهایی پویا ترکیب کردند [۳۸]. اشاره می‌شود که روش طول قوس نیز خودکار نیست. افزون بر این، کارایی راه حل طول قوس وابستگی شدیدی به درجه‌ی آزادی گزینشی و اندازه طول قوس دارد. Lee و همکارانش، فن طول قوس را با روش رهایی پویای جنبشی ترکیب کرده‌اند [۳۹ و ۴۰]. تحلیل غیرخطی ترموالاستیک صفحات گرد ساندویچی، براساس تئوری برشی مرتبه اول و روابط غیرخطی کرنش و نکارمن و در نظر گرفتن خواص مواد در دو حالت وابسته به دما و مستقل از دما، توسط Golmakani و Yoosefian Saggi بررسی شد [۴۱]. در پیمایش مسیرهای ایستایی، نیروی نامیزان R از برابری (۷) حساب می‌گردد. نماد λ ضریب بار است. این عامل سبب می‌شود تا تراز بار ثابت نباشد.

$$R = \lambda P - F \quad (7)$$

Rezaiee-Pajand و Alamtian، در پیمایش ناحیه‌های بازگشتی، برای یافتن ضریب بار در هر تکرار رهایی پویا، از دو فرآیند کمینه کردن نیروی نامیزان و تغییر مکان نامیزان استفاده نمودند [۴۲]؛ باید آگاه بود، با بهره‌جستن از این راه‌کارها، تحلیل به جای همگرایی به نقطه‌های ایستایی دور، به نقطه‌های ایستایی نزدیک همگرا خواهد شد. در روش کمینه‌ی نیروی

در بیشتر اثرها، کوچک‌ترین فرکانس سامانه‌ی دینامیکی ساختگی با بهره‌جستن از اصل ریلی برآورد می‌شود. برابری (۵)، آن را نشان می‌دهد.

$$\omega_{min} = \frac{X^T F}{X^T M X} \quad (5)$$

در این رابطه، ω_{min} ، کمینه‌ی فرکانس است. زانگ عامل میرایی را از $c = 2\omega_i$ به دست آورد [۳۵]. Rezaiee-Pajand و Alamtian، با استفاده نگره‌های دینامیکی سازه‌ها، برابری (۶) را برای میرایی هر درجه‌ی آزادی پیشنهاد کردند [۲۱]:

$$C_{ii} = \sqrt{\omega_{min}^2 [4 - (t^n)^2 \omega_{min}^2] m_{ii}} \quad (6)$$

رفتار ناخطی سازه‌ها ویژگی‌های گوناگونی دارند. نقطه‌های حدی بار و تغییر مکان در مسیرهای پایدار و ناپایدار، نقطه‌های کمانشی و در پی آن رفتار پس کمانشی سازه بسیار مهم هستند. مسیر پایدار سازه ممکن است به گونه‌ای رخ دهد که افزایش نیرو و افزایش جابه‌جایی، هم‌زمان روی دهند. مسیر ناپایدار نیز می‌تواند با کاهش بار و افزایش تغییر مکان همراه باشد. وجود نقطه‌های حدی در مسیر رفتار سازه‌ها، به‌طور معمول تحلیل و پیمایش خم رفتار آن‌ها را دچار مشکل می‌نماید. بر این پایه، انتخاب راه‌کار تحلیلی مناسب برای پیمایش کامل مسیر، از ارزش فراوانی برخوردار است. باید دانست، پیدایش ناحیه‌های بازگشتی بار و تغییر مکان در مسیر ایستایی سازه به سبب وجود نقطه‌های حدی بار یا تغییر مکان می‌باشد. می‌توان از فن رهایی پویا برای پیمایش مسیر ایستایی سازه‌ها استفاده نمود. در رابطه‌سازی‌های متداول رهایی پویا، بار خارجی در هر نمو بارگذاری ثابت است. به همین دلیل، روش‌های معمول رهایی پویا توانایی پیمایش ناحیه‌های مزبور را ندارند. از این رو، با رسیدن به نقطه‌های حدی در مسیر ایستایی پرش‌هایی ایجاد می‌گردد.

شکل (۱) مسیر ایستایی سازه‌ای با ناحیه‌های بازگشتی نیرو و جابه‌جایی را نشان می‌دهد. نقطه‌های حدی تغییر مکان و بار به ترتیب با A و C نمایش داده شده‌اند. در نقطه‌ی حدی A ، با افزایش اندکی در مقدار جابه‌جایی، نمودار به نقطه‌ی B منتقل می‌گردد. در مورد نقطه‌ی C نیز چنین است و با افزایش کم نیرو، نقطه‌ی D در شاخه‌ی دیگر نمودار به دست می‌آید. به سخن دیگر، شیوه‌ی رهایی پویای معمول فقط شاخه‌های افزایشی مسیر ایستایی را می‌پیماید. با وجود این، شیوه‌ای خودکار را برای برطرف نمودن این کاستی پیشنهاد داده‌اند. برای پیمایش

نامیزان (MRF) عامل بار از رابطه‌ی (۸) حساب می‌شود.

$$\lambda^n = \frac{\sum_{i=1}^{ndof} p_{i,ref} f_i^n}{\sum_{i=1}^{ndof} (p_{i,ref})^2} \quad (۸)$$

در این جا، $p_{i,ref}$ بردار بار خارجی پایه می‌باشند. این پژوهش‌گران برای گذر خودکار از نقطه‌های حدی، با کمینه نمودن انرژی نامیزان (MRF) برابری (۹) برای یافتن عامل بار پیشنهاد دادند [۴۳]:

$$\lambda^n = \frac{\sum_{i=1}^{ndof} \frac{p_{i,ref}}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} \left[4t^n f_i^n - (2m_{ii}^n - t^n C_{ii}^n) \dot{X}_i^{n-\frac{1}{2}} \right]}{4t^n \sum_{i=1}^{ndof} \frac{(p_{i,ref})^2}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n}} \quad (۹)$$

افزون بر این، Alamatian با پایه‌ی کمینه کردن تغییر مکان نامیزان (MDI) و انرژی جنبشی (MKE)، به ترتیب، روابط (۱۰) و (۱۱) را به چاپ رسانید [۳].

$$\lambda^n = \frac{\sum_{i=1}^{ndof} \frac{p_{i,ref}}{(2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n)^2} \left[2t^n f_i^n - (2m_{ii}^n - t^n C_{ii}^n) \dot{X}_i^{n-\frac{1}{2}} \right]}{2t^n \sum_{i=1}^{ndof} \left(\frac{p_{i,ref}}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} \right)^2} \quad (۱۰)$$

$$\lambda^n = \frac{\sum_{i=1}^{ndof} p_{i,ref} \left(\frac{m_{ii}^n}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} \right)^2 \left[2t^n f_i^n - (2m_{ii}^n - t^n C_{ii}^n) \dot{X}_i^{n-\frac{1}{2}} \right]}{2t^n \sum_{i=1}^{ndof} \left(\frac{m_{ii}^n p_{i,ref}}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} \right)^2} \quad (۱۱)$$

افزوده می‌شود تا عامل بار در گام نو حساب شود [۴۴]. برابری (۱۲)، نمو ضریب بار را در روش این پژوهش‌گران نشان می‌دهد.

$$\delta \lambda^n = \frac{-\sum_{i=1}^{ndof} \left(\frac{p_{i,ref}}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} \right) \cdot \left((2m_{ii}^n - t^n C_{ii}^n) \dot{X}_i^{n-\frac{1}{2}} + 2t^n r_i^{n-1} \right)}{\sum_{i=1}^{ndof} \frac{4t^n}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} (p_{i,ref})^2} \quad (۱۲)$$

کردند. با این کار، رابطه‌ی دیگری برای نمو ضریب بار به دست آمد [۴۵]. رابطه‌ی (۱۳)، عامل پیشنهادی ایشان را نشان می‌دهد.

$$\delta \lambda^n = \frac{-\sum_{i=1}^{ndof} \left(\frac{p_{i,ref}}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} \right) \cdot \left((2m_{ii}^n - t^n C_{ii}^n) \dot{X}_i^{n-\frac{1}{2}} + 2t^n r_i^{n-1} \right)}{\sum_{i=1}^{ndof} \frac{2t^n}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} (p_{i,ref})^2} \quad (۱۳)$$

در این پژوهش با کمینه کردن جمع کار خارجی و انرژی پسماند نسبت به عامل بار، رابطه‌ی جدیدی برای این ضریب به دست می‌آید. کار خارجی W و انرژی جنبشی KE ، از رابطه‌ی (۱۴) برآورد می‌شوند.

$$W = \lambda P \delta X; \quad KE = R \delta X \quad (۱۴)$$

سپس، مقدار نیروی پسماند از برابری (۷) در رابطه‌های بالا جای‌گزین می‌شود.

$$W + KE = \sum_{i=1}^{ndof} \lambda^n p_i^n t^n \left(\frac{2m_{ii}^n - t^n C_{ii}^n}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} \dot{X}_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{2t^n}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} (\lambda^n p_i^n - f_i^n) \right) + \sum_{i=1}^{ndof} \frac{1}{2} m_{ii}^n \left(\frac{2m_{ii}^n - t^n C_{ii}^n}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} \dot{X}_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{2t^n}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} (\lambda^n p_i^n - f_i^n) \right)^2 \quad (۱۵)$$

در رابطه‌سازی دیگر، ایشان با صفر کردن نمو کار نیروهای خارجی (ZWI)، راه‌کار نوینی برای یافتن نمو عامل بار پیشنهاد

بار کمانشی قاب‌ها به وسیله‌ی رهایی پویا توسط Alamatian و Hosseini-Nejad Goshik انجام پذیرفت [۴۶]. Rezaiee-Pajand و Estiri، بار بحرانی سازه‌های گوناگون را با بهره جستن از کار خارجی یافتند [۴۷]. Rezaiee-Pajand و Mohammadi-Khatami، تحلیل غیرخطی سازه‌های کابلی را با رهایی پویا انجام دادند [۴۸].

۳- روش پیشنهادی



پس از ساده‌سازی و تعریف عامل‌های A^n و B^n به مانند رابطه‌های (۱۶)، برای (۱۷) به دست می‌آید.

$$A^n = \frac{2m_{ii}^n - t^n C_{ii}^n}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} \dot{X}_i^{n-\frac{1}{2}}; \quad B^n = \frac{2t^n}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} \quad (16)$$

$$W + KE = \sum_{i=1}^{ndof} \{ \lambda^n p_i^n t^n [A^n + B^n (\lambda^n p_i^n - f_i^n)] + \frac{1}{2} m_{ii}^n [A^n + B^n (\lambda^n p_i^n - f_i^n)]^2 = \\ t^n [\lambda^n A^n p_i^n + B^n (\lambda^n p_i^n)^2 - \lambda^n B^n p_i^n f_i^n] + \\ \frac{m_{ii}^n}{2} [(A^n)^2 + (B^n \lambda^n p_i^n)^2 + (B^n f_i^n)^2 + 2A^n B^n \lambda^n p_i^n - 2A^n B^n f_i^n - 2(B^n)^2 \lambda^n p_i^n f_i^n] \quad (17)$$

هدف، محاسبه‌ی ضریب بار λ به گونه‌ای است که برای (۱۷) کمینه شود. شرط لازم برای کمینه شدن این تابع آن است که مشتق یکم نسبت به عامل بار صفر شود. به همین سبب، از

$$\sum_{i=1}^{ndof} \{ t^n [A^n p_i^n + 2\lambda^n B^n (p_i^n)^2 - B^n p_i^n f_i^n] + m_{ii}^n [\lambda^n (B^n p_i^n)^2 + A^n B^n p_i^n - (B^n)^2 p_i^n f_i^n] \} = 0 \Rightarrow \\ \lambda^n = \sum_{i=1}^{ndof} \frac{m_{ii}^n B^n p_i^n (B^n f_i^n - A^n) + p_i^n t^n (B^n f_i^n - A^n)}{B^n (p_i^n)^2 (B^n m_{ii}^n + 2t^n)} \quad (18)$$

رابطه‌های متداول نیاز به تعیین علامت است. این کاستی‌ها در شیوه‌ی پیشنهادی برطرف شده است. در ادامه، ویژگی‌های رابطه‌سازی نوین می‌آید. شیوه‌ی جدید به دست آمده برای ضریب بار فقط به عامل‌های رهایی پویا وابسته می‌باشد. از این رو، همگی محاسبه‌ها به صورت برداری انجام می‌پذیرد. افزون بر این، فقط یک رابطه برای عامل بار به دست آمد. بنابراین، این ضریب در سراسر فرآیند حل دارای رابطه‌ی یکسانی خواهد بود. نیاز نداشتن به تعیین علامت که در روش‌های طول قوسی وجود دارد، یکی دیگر از برتری‌های رابطه‌سازی پیشنهادی است. گام‌های روش رهایی پویا در پیمایش مسیر ایستایی سازه‌ها به گونه‌ی زیر است:

گام ۱- مقدارهای نخستین سرعت و تغییر مکان را صفر پندارید.

گام ۲- بردار نیروی داخلی و ماتریس سختی مماسی سازه بر پا شود. این ماتریس، فقط برای برآورد جرم ساختگی است و نیازی به محاسبه‌های ماتریسی در فرآیند حل نیست.

گام ۳- ماتریس جرم و میرایی ساختگی را تشکیل دهید. گام ۴- عامل بار را از رابطه‌های (۸) تا (۱۳) یا (۲۰)، براساس فن خواستنی به دست آورید.

گام ۵- بردار نیروی نامیزان، از برابری (۷) برآورد شود.

گام ۶- اگر $\| \frac{R^T R}{P^T P} \| < e_R = 10^{-4}$ بود، به گام بروید؛ وگرنه، سرعت‌ها را از رابطه‌ی (۱) به روز کنید. مقدار e_R ، خطای پذیرفتنی است.

گام ۷- جابه‌جایی‌های گره‌ی از برابری (۲) به روز گردد و

افزون بر این، شرط کافی برای کمینه شدن برابری (۱۷) این است که مشتق دوم آن نسبت به عامل بار مثبت باشد. رابطه‌ی (۱۹) نشان می‌دهد که مشتق دوم همواره بزرگتر از صفر است. از این رو، ضریب بار (۱۸)، تابع (۱۷) را کمینه می‌کند.

$$\frac{d^2(W + RE)}{d(\lambda^n)^2} = \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^{ndof} [2B^n (p_i^n)^2 t^n + m_{ii}^n (B^n p_i^n)^2] > 0$$

سرانجام، با جای‌گذاری عامل‌های A^n و B^n در رابطه‌ی (۱۸)، می‌توان ضریب بار از برابری (۲۰) حساب کرد.

$$\lambda^n = \frac{\sum_{i=1}^{ndof} \frac{p_i}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} \left[3t^n f_i^n - (2m_{ii}^n - t^n C_{ii}^n) \dot{X}_i^{n-\frac{1}{2}} \right]}{\sum_{i=1}^{ndof} \frac{4t^n (p_i)^2}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n}} \quad (20)$$

ضریب بار به دست آمده در مقدار بار پایه ضرب می‌شود و بار وارد به سازه به دست می‌آید. سازه با این نیرو، تحلیل ناخطی می‌شود و پاسخ‌ها برای آغاز نمو بعدی به دست می‌آیند. در رابطه‌سازی‌های متداول، گام‌های پیشگویی و درست‌سازی وجود دارد. به همین سبب، رابطه‌ی نمو بارگذاری در تکرار نخست و نیز تکرارهای تصحیح کننده متفاوت است. در فرآیند روش‌های نموی-تکراری معمول، علامت نمو ضریب بار آن نیز بایستی مشخص گردد. به سخن دیگر، افزایشی یا کاهششی بودن این نمو و تغییر آن اهمیت دارد. آشکار است که علامت نمو ضریب بار در نقطه‌های حدی بار تغییر می‌کند. بنابراین، در



شده است. در ادامه، نماد و چگونگی به دست آوردن آن‌ها می‌آید. برای مقایسه راه‌کارها، سه معیار به کار رفته است. رابطه‌ی (۲۱) این سه معیار را نشان می‌دهد.

$$S1 = \frac{\text{Total Iterations}}{\text{Number of Converged Points}};$$

$$S2 = \frac{\text{Total Iterations}}{\text{Time Iteration}};$$

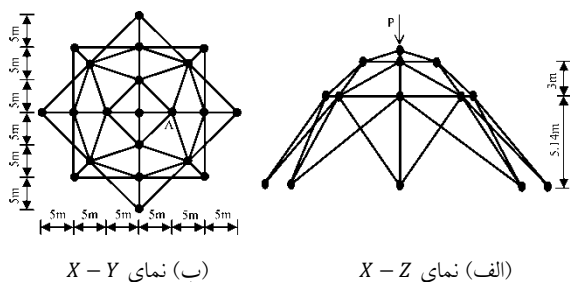
$$S3 = \frac{\text{Time Iterations}}{\text{Number of Converged Points}}$$

(۲۱)

مقدار کمتر برای $S1$ اشکار می‌کند که آن روش، شمار نقطه‌های همگرایی بیشتری را در تکرارهای کمتر به دست می‌آورد. برای معیار $S3$ نیز چنین است. مقدار کمتر برای آن، نشان از زمان کمتر تحلیل به ازای شمار بیشتر در نقطه‌های همگرایی دارد. از سوی دیگر، عامل $S2$ شمار تکرار را در یک ثانیه از زمان تحلیل نشان می‌دهد. برخلاف معیار پیشین، مقدار بیش‌تر $S2$ نشان از برتری شیوه دارد. کم بودن تعداد نقطه‌های همگرایی سبب کاهش زمان تحلیل می‌شود. از سوی دیگر، برای یافتن مسیر ایستایی دقیق‌تر، به نقطه‌های همگرایی بیشتری نیاز است. به همین سبب، زمان تحلیل افزایش می‌یابد. یادآوری می‌کند، هدف اصلی این پژوهش افزون بر افزایش دقت و کارایی روش‌های پویا، زمان را نیز در بر می‌گیرد. با استفاده از این سه عامل، نرخ همگرایی روش‌ها قابل مقایسه می‌باشند.

۴-۱- خرابای سقفی

نخست، راستی آزمایی برنامه با تحلیل خرابای شکل (۲) انجام می‌پذیرد که پژوهش‌گران پیشین آن را حل کرده‌اند [۴۹]. ارتفاع سازه ۹/۱۷ متر است. ضریب کشسانی و سطح مقطع عضوهای سازه، به ترتیب، ۲۱۰ گیگاپاسکال و ۰/۰۱ مترمربع می‌باشند. گره‌های پایین‌ترین تراز خرابا روی تکیه‌گاه‌های ساده هستند.



شکل ۲- هندسه‌ی خرابای سقفی

در ادامه، این سازه با هفت شیوه‌ی جدول (۱) تحلیل شد. شکل (۳) نمودار بار-خیز را نشان می‌دهد. نخست این‌که،

تحلیل را از گام دنبال کنید.

گام ۸- تغییر مکان‌ها و عامل بار این نمو را چاپ کنید.
گام ۹- اگر بار یا تغییر مکان هدف به دست آمد، تحلیل پایان می‌یابد؛ وگرنه، $\lambda = \lambda + 1$ و از گام ادامه دهید.

۴- نمونه‌های عددی

برنامه‌ی رایانه‌ای روش پیشنهادی با استفاده از زبان برنامه‌نویسی فرترن نوشته شده است. سپس، تحلیل سازه‌های گوناگون شامل خراباهای سه بُعدی، قاب‌های دو و سه بُعدی و پوسته‌ها که دارای رفتار ناخطی هندسی می‌باشند، انجام می‌پذیرد. رابطه‌سازی پیشنهادی به گونه‌ی جزء بستگی ندارد. از این رو، می‌توان این روش را در هر جزء دیگری نیز به کار برد. به این منظور فقط باید رابطه‌های این‌گونه جزء‌ها را در برنامه وارد کرد. ماتریس جرم، از فن آندروود و پنداشتن گام زمانی برابر یک به دست می‌آید. هم‌چنین، برای برآورد عامل میرایی، شیوه‌ی زانگ به کار می‌رود. برای هر نمونه، مسیر ایستایی می‌آید. در بخش‌های پیشین، رابطه‌سازی‌هایی برای یافتن عامل بار در تکرارهای رهایی پویا آمد. جدول (۱) این فرایندها و نشانه‌ی به کار رفته برای هر یک را نشان می‌دهد.

جدول ۱- راه‌کارهای رهایی پویای به کار رفته و نشانه‌ی آن‌ها

نوع فن	نشانه‌ی روش	رابطه‌ی یافتن عامل بار
پیشین	MRF	(۸)
	MRE	(۹)
	MDI	(۱۰)
	MKE	(۱۱)
	MEW	(۱۲)
	ZWI	(۱۳)
پیشنهادی	MEWaKE	(۲۰)

در این‌جا، تغییر مکان در نمو آغازین صفر پنداشته می‌شود. در نمو‌های بعدی نیز از نقطه‌ی ایستایی گام پیشین برای حدس نخستین بهره‌جویی می‌گردد. خاطرنشان می‌کند، نمو عامل بار، در شمار نقطه‌های مسیر ایستایی اثر می‌گذارد. به سخن دیگر، با کوچک شدن این نمو، نمودار بار-جابجایی با شمار نقطه‌های بیشتری پیمایش می‌شود. این ویژگی سبب شناخت هر چه بهتر رفتار سازه می‌گردد. در این پژوهش، نمو عامل بار پس از رسیدن به همگرایی و برای شروع گام بعدی، یک در نظر گرفته می‌شود. برای شناخت بهتر روش‌ها، از سه گونه معیار استفاده

شمار تکرارها، زمان تحلیل و امتیاز شیوه‌های مورد بررسی در جدول (۲) درج شده است. عددهای درون پرانتز مرتبه‌ی هر فن را بر پایه‌ی آن معیار نشان می‌دهد. جدول (۲) نشان می‌دهد بر پایه‌ی سنجش‌های $S1$ و $S3$ راه‌کار کمینه‌ی نیروی نامیزان (MRF) دارای بیش‌ترین دقت است. فرآیند پیشنهادی MEWAKE، در جایگاه دوم می‌باشد. به سخن دیگر، شیوه‌ی نویسندگان، نقاط همگرا شده‌ی بیشتری را در شمار تکرار کمتری به دست می‌آورد. در سنجش $S2$ ، راه‌کار جدید MEWAKE در رتبه آخر قرار دارد.

جدول ۲- امتیاز و رتبه‌ی روش‌ها برای خرابای سقفی

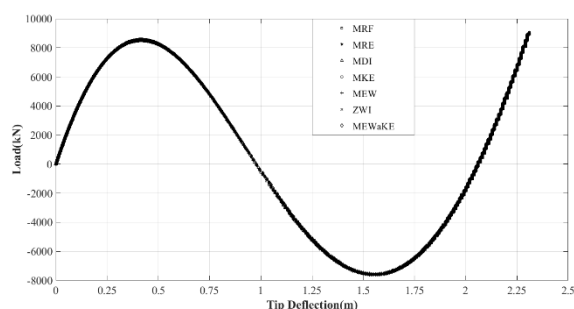
روش	تکرار	نقاط همگرا	زمان (ثانیه)	معیار $S1$	معیار $S2$	معیار $S3$
MRF	۵۳۵۸۴	۶۹۵	۷۵/۲۷	(۱)	(۴)	(۱)
MRE	۱۰۶۷۳۲	۱۱۳۹	۱۴۸/۱۵۴	(۳)	(۱)	(۳)
MDI	۱۶۱۴۶۴	۱۵۸۴	۲۲۶/۱۰۷	(۴)	(۲)	(۴)
MKE	۱۶۱۴۶۴	۱۵۸۴	۲۲۶/۵۷۵	(۴)	(۳)	(۵)
MEW	-	-	-	-	-	-
ZWI	-	-	-	-	-	-
MEWAKE	۱۰۹۴۲۲	۱۲۶۹	۱۵۵/۵۸۳	(۲)	(۵)	(۲)

۴-۲- خرابای ستاره‌ای

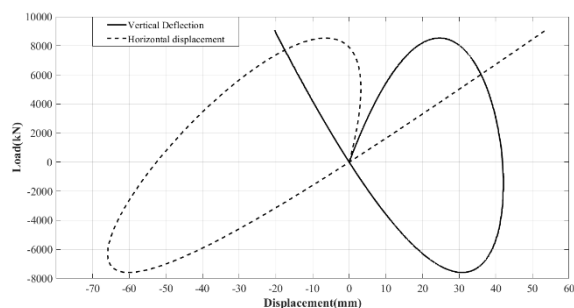
شکل (۴) خرابای ستاره‌ای را نشان می‌دهد که پاسخ آن با بارگذاری متقارن در دست است [۴۳]. این خرابای فضایی ۱۳ گره و ۲۱ درجه‌ی آزادی دارد. گره‌های ۸ تا ۱۳ دارای تکیه‌گاه ساده هستند. برای تحلیل، هر عضو با یک جزء مدل‌سازی می‌شود. ضریب کشسانی و سطح مقطع اعضا به ترتیب، ۳۰۳۰۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع و ۳/۱۷ میلی‌مترمربع می‌باشند. مقدار بار پایه برای گره‌ی ۱ برابر ۵۰ نیوتن و برای گره‌های ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷، ۲۵ نیوتن است.

شکل (۵) مسیر ایستایی خیز نوک خرپا (گره‌ی ۱) و گره‌ی ۲ را نشان می‌دهد. محور قائم این نمودارها، مقدار بار وارد بر گره‌ی نوک را نشان می‌دهد. برای تغییر مکان عمودی گره‌ی ۱، دو نقطه‌ی حدی نیرو وجود دارد. بارهای ۳۹۸/۳۷۸۵ و ۲۲۵/۴۱۸- نیوتن و جابه‌جایی‌های، به ترتیب، ۷/۸۲۱ و ۲۹/۱ میلی‌متر این نقطه‌ها را نشان می‌دهند. نقطه‌های بازگشت تغییر مکان برای جابه‌جایی عمودی گره‌ی ۲ نیز در نیروهای ۳۷۶/۳۰۸ و ۲۰۶/۲۰۵- قرار دارند. خیز گره‌ی ۲ در این نقطه‌ها، به ترتیب، ۰/۸۵۵۲ و ۱/۶۸۹- میلی‌متر به دست آمدند. باید

نتیجه‌ی برنامه‌ی رایانه‌ای نویسندگان با مرجع [۵۰] یکسان می‌باشد. در فن‌های MEW و ZWI پرش قابل توجه‌ای در مسیر ایستایی مشاهده شد. سایر روش‌ها، نمودار نیرو-جابه‌جایی کم و بیش یکسانی داشتند. با وجود این، شمار تکرارها، شمار نمونه‌های همگرایی و زمان تحلیل آن‌ها تفاوت دارد. هم‌چنین، روش‌های MKE و MDI شمار تکرار و نقطه‌های همگرایی یکسانی به دست آورده‌اند. به سخن دیگر، این دو راه‌کار برای تحلیل این خرپا مانند هم رفتار کرده‌اند. بر پایه‌ی شکل (۳)، سازه پس از بار ۸۵۳۱/۹۶۴ کیلونیوتن وارد بخش پس کمانشی می‌شود. به سخن دیگر، این نیرو نقطه‌ی حدی بار است. جابه‌جایی متناظر این نیرو ۴۱۶/۸ میلی‌متر به دست آمد. پس از این، سازه ناپایدار می‌باشد. دیگر نقطه‌ی حدی نیرو در بار ۷۵۸۵/۵۰۶- و خیز ۱۵۵۴ میلی‌متر روی داد. شمار نمونه‌های همگرایی میان نقطه‌های حدی بار در شیوه‌های MRF، MRE، MDI، MKE و MEWAKE، به ترتیب، ۲۰۹، ۲۹۲، ۳۷۶، ۳۷۶ و ۳۱۸ است. این خرپا دارای دو نقطه‌ی نیروی صفر است. خیز متناظر با این نقطه‌ها برابر با ۰/۹۷۹۲ و ۲/۰۶ متر هستند. هم‌چنین، جابه‌جایی افقی گره‌ی A، دارای یک نقطه حدی تغییر مکان می‌باشد. مقدار نیرو در این نقطه، ۱۵۲۸/۰۹۲ کیلونیوتن به دست آمد.



(الف) خیز گره‌ی نوک



(ب) نمودار جابه‌جایی گره‌ی A

شکل ۳- مسیر ایستایی خرابای سقفی

نتیجه‌های تحلیل شیوه‌های مورد بررسی در جدول (۳) درج شده است. از نگاه شمار نقطه‌های همگرا شده روی مسیر ایستایی، شمار تکرارها و نیز زمان مورد نیاز برای تحلیل، روش MEWaKE در رتبه‌ی نخست جای دارد. معیارهای S1 تا S3 بر توانایی راه‌کار نویسندگان دلالت می‌کند. به سخن دیگر، از نگاه زمان تحلیل خرپا، روش MEWaKE از دو راه‌حل دیگر، تندتر می‌باشد. برپایه‌ی جدول (۳)، تحلیل این سازه با فن‌های MRE و MEWaKE به نتیجه‌های بهتری می‌انجامد.

جدول ۳- امتیاز و رتبه‌ی روش‌ها برای خرپای ستاره‌ای

روش	تکرار	نقاط همگرا	زمان (ثانیه)	معیار S1	معیار S2	معیار S3
MRF	-	-	-	-	-	-
MRE	۱۷۰۱۳۶	۱۰۶۳	۲۴۴/۱۵۶	(۲)	(۲)	(۲)
MDI	۲۴۶۰۵۹	۱۴۹۰	۳۷۳/۱۳۷	(۳)	(۳)	(۳)
MKE	-	-	-	-	-	-
MEW	-	-	-	-	-	-
ZWI	-	-	-	-	-	-
MEWaKE	۱۶۳۰۲۲	۱۱۳۶	۲۲۵/۸۷۶	(۱)	(۱)	(۱)

۳-۴- قاب توگل

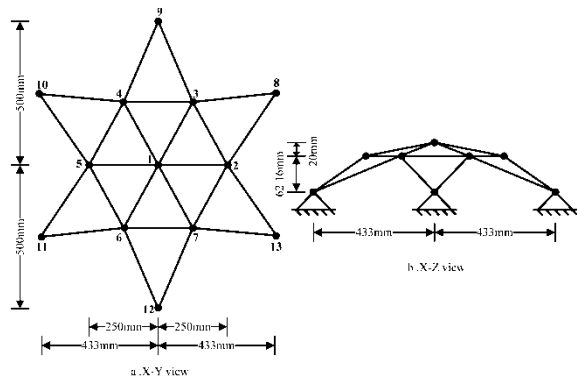
در ادامه، کارایی فن نویسندگان در تحلیل سازه‌های قابی بررسی می‌شود. برای این کار، نخست راستی‌آزمایی برنامه در تحلیل ناخطی هندسی قاب شکل (۶) انجام می‌پذیرد [۵۱]. هر عضو قاب، با پنج جزء یکسان جایگزین خواهد شد. ضریب کشسانی، سطح مقطع و لنگر لختی اعضا، به ترتیب، ۱۰۰ گیگاپاسکال، ۱۸/۵۵ میلی‌مترمربع و ۹/۲۷ میلی‌متر به توان چهار می‌باشند. ویلیام برابری (۲۲) را برای پاسخ تحلیلی رابطه‌ی بار و تغییرمکان پیشنهاد داد [۵۲]. عامل‌های F_1 و F_2 ، به ترتیب، به سختی‌های محوری و خمشی وابسته هستند. افزون بر این، طول نخستین عضوها، زاویه با افق و خیز نوک، به ترتیب، با β_0 و D_y نشان داده شده‌اند. برای جزئیات بیش‌تر، مرجع [۵۲] خوانده شود.

$$\lambda P \approx 2(F_1 + F_2 \sin \beta_0) \quad (22)$$

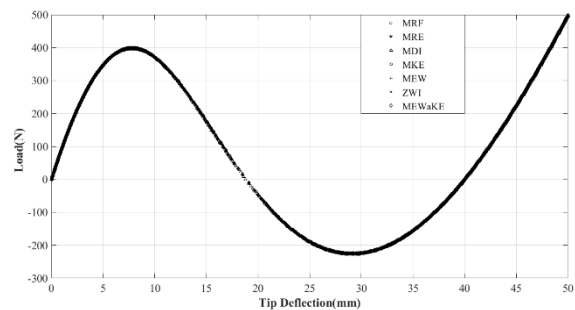
$$F_1 = \frac{EA}{L} \left[D_y \sin \beta_0 - 0.6 \frac{D_y^2}{L} \right] \quad (23)$$

شکل (۷) مسیر ایستایی خیز گره‌ی نوک را نمایش می‌دهد. تمامی روش‌ها، به جز فن ZWI، توانسته‌اند مسیر ایستایی سازه را کامل پیمایش کنند. به سخن دیگر، شیوه‌ی ZWI قادر به

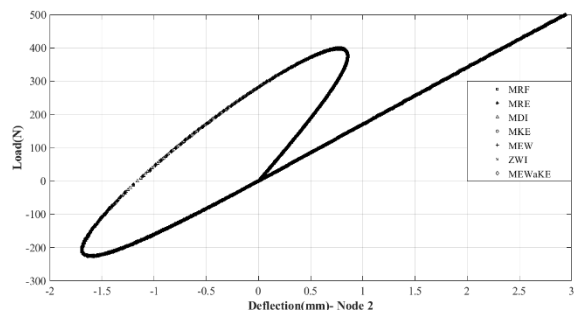
اشاره شود که روش‌های MRF، MKE، MRE و MEW دارای ZWI پرش قابل توجه‌ای در مسیر ایستایی این سازه بودند. به همین سبب، این شیوه‌ها توانایی پیمایش این خرپا را نداشتند. سایر فرایندها مناسب‌ترین عمل‌کرد را دارند و همه‌ی مسیر بازگشت بار و تغییرمکان را پیموده‌اند. با وجود این، شمار نقطه‌های همگرایی در آن‌ها متفاوت است؛ به گونه‌ای که فن‌های MDI و MEWaKE مسیر ایستایی را با تعداد بیشتری نمو پیموده‌اند. برای نمونه، شمار نقطه‌های همگرایی بین نقطه‌های حدی بار در راه‌کارهای MDI، MRE و MEWaKE، به ترتیب، ۱۸۰، ۳۶۳ و ۲۲۷ می‌باشند.



شکل ۴- خرپای ستاره‌ای



(الف) خیز گره‌ی ۱



(ب) خیز گره‌ی ۲

شکل ۵- مسیر ایستایی خرپای ستاره‌ای

جدول ۴- امتیاز و رتبه‌ی روش‌ها برای قاب توکل

روش	تکرار	نقاط همگرا	زمان (ثانیه)	معیار S1	معیار S2	معیار S3
MRF	۴۳۵۵۳	۴۷	۵۷/۲۵۴	(۱)	(۵)	(۲)
MRE	۱۰۷۹۷۳	۹۶	۱۳۸/۵۶	(۴)	(۲)	(۴)
MDI	۱۵۲۸۸۹	۱۳۳	۱۹۶/۴۹۸	(۵)	(۴)	(۶)
MKE	۱۵۲۹۳۹	۱۳۳	۱۹۶/۳۸۹	(۶)	(۳)	(۵)
MEW	۹۷۶۴۸	۹۵	۱۲۶/۲۳۶	(۳)	(۶)	(۳)
ZWI	-	-	-	-	-	-
MEWaKE	۱۱۶۹۴۴	۱۱۶	۱۳۶/۹۵۳	(۲)	(۱)	(۱)

۳۰۳۰۰۰ و ۱۰۹۶۰۰ نیوتن بر سانتی‌متر مربع هستند. گره‌ی ۱ دارای بار P و نیروهای وارد بر گره‌های ۲، ۳ و ۷ برابر $0.5P$ است. بارها به سوی پایین (خلاف راستای Z) وارد می‌شوند.

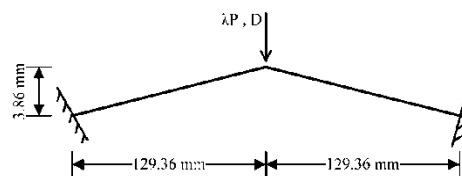
جدول ۵- مشخصات هندسی قاب ستاره‌ای بدون اثر برش

I_{33} (cm ⁴)	I_{22} (cm ⁴)	J (cm ⁴)	A_{v33} (cm ²)	A_{v22} (cm ²)	A (cm ²)
۲/۳۷۷	۰/۲۹۵	۰/۹۱۸	۲/۶۴۱۷	۲/۶۴۱۷	۳/۱۷

امتیاز راه‌کارهای به کار رفته قاب ستاره‌ای در جدول (۶) درج شده‌اند. روش ZWI، توانایی تحلیل این سازه را نداشت. مانند نمونه‌ی پیشین، شیوه‌ی پیشنهادی، رتبه‌ی نخست در حل این قاب دارد. مسیر ایستایی این سازه در شکل (۸) نشان داده شده است. بر این پایه، دو نقطه‌ی بازگشت نیرو و دو نقطه‌ی بازگشت جابه‌جایی در این سازه به وجود آمد. نقطه‌های حدی بار در نیروهای $۵۷۹/۴۰۶۸$ و $۳۳۰/۵۱۶۲$ نیوتن روی می‌دهند. نقطه‌های حدی تغییر مکان نیز کم و بیش در همین بارها جای دارند. نتیجه‌های به دست آمده با مرجع [۵۳] یکسان می‌باشد. باید دانست، روش MRF دارای پرش در مسیر ایستایی بود. به همین سبب، این راه‌حل در رتبه‌ی آخر جای دارد.

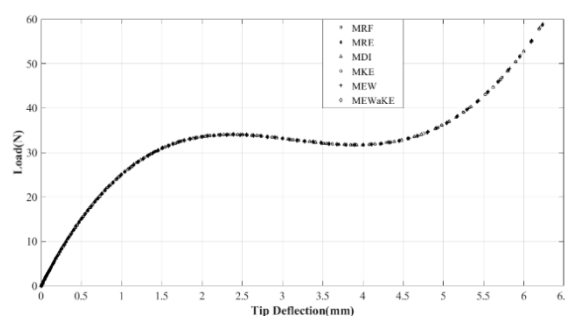
جدول ۶- امتیاز و رتبه‌ی روش‌ها برای قاب بدون اثر برش

روش	تکرار	نقاط همگرا	زمان (ثانیه)	معیار S1	معیار S2	معیار S3
MRF	۵۰۷۷	۷۰	۴۰۵/۶۷۸	(۶)	(۶)	(۶)
MRE	۵۷۸۹	۷۵	۴۶۲/۴۰۰	(۳)	(۴)	(۳)
MDI	۶۷۴۲	۸۶	۵۳۸/۶۳۸	(۴)	(۵)	(۴)
MKE	۶۴۶۰	۹۰	۵۱۵/۱۲۸	(۲)	(۲)	(۲)
MEW	۴۸۴۳	۵۶	۳۸۶/۴۲۸	(۵)	(۳)	(۵)
ZWI	-	-	-	-	-	-
MEWaKE	۶۹۷۹	۱۰۵	۵۴۸/۶۹۸	(۱)	(۱)	(۱)



شکل ۶- قاب ویلیام توکل

تحلیل این قاب نبود. مانند نمونه‌های پیشین، روش‌های MKE و MDI برای تحلیل این خرپا مانند هم رفتار کرده‌اند. فرآیندهای MKE، MDI و MEWaKE مسیر ایستایی را با تعداد بیشتری نمو همگرا شده می‌پیمایند. نقطه‌ی کم‌انرژی این قاب در نیروی $۳۴/۰۲۲۸۰۲$ نیوتن روی می‌دهد. پس از آن، ناحیه‌ی بازگشت بار سازه به آرامی شکل می‌گیرد و قاب وارد بخش پس کم‌انرژی می‌شود. در این ناحیه، با کاهش در نیرو، تغییر مکان افزایش می‌یابد. این روند تا رسیدن بار به $۳۱/۷۰۵۸۱۸$ نیوتن ادامه دارد. خیز گره‌ی نوک، به ترتیب، $۲/۳۸$ و $۳/۹۲۲۷$ میلی‌متر است. شمار نمونه‌های همگرایی میان نقطه‌های حدی بار در شیوه‌های MRF، MRE، MDI، MKE، MEW و MEWaKE، به ترتیب، ۶، ۱۵، ۲۲، ۲۲، ۱۸ و ۱۵ است.



شکل ۷- مسیر ایستایی گره‌ی نوک قاب توکل

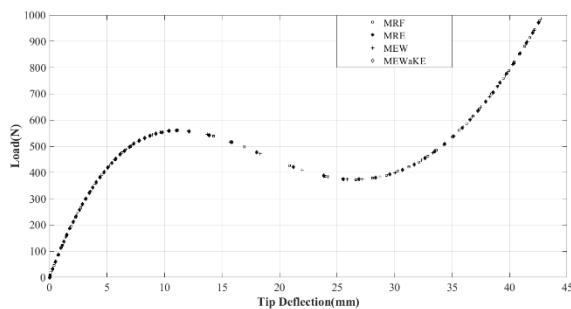
جدول (۴) نتیجه‌های سنجش‌ها را نشان می‌دهد. بر پایه‌ی این جدول، راه‌کار پیشنهادی MEWaKE در دو معیار، رتبه‌ی نخست و در معیار S1 رتبه‌ی دوم را دارد. به سخن دیگر، شیوه‌ی نویسندگان از نظر زمان تحلیل در هر نمو یا تکرار، عملکرد مناسب‌تری به دست آورده است.

۴-۴- قاب ستاره‌ای بدون اثر برش

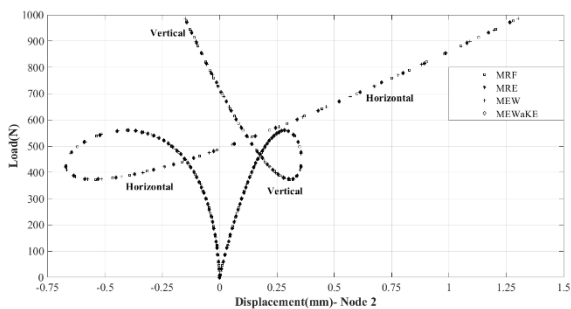
در این بخش، تحلیل قاب ستاره‌ای شکل (۴) انجام می‌پذیرد. پیش از این، میک و تان این سازه را تحلیل کردند [۵۳]. این قاب دارای ۲۴ عضو، ۱۳ گره و ۶۰ درجه‌ی آزادی است. مشخصه‌های هندسی برای این گونه در جدول (۵) درج شده‌اند. افزون بر این، ضریب کشسانی و ضریب برشی، به ترتیب،

جدول ۷- امتیاز و رتبه‌ی روش‌ها برای قاب با اثر برش

روش	تکرار	نقاط همگرا	زمان (ثانیه)	معیار S1	معیار S2	معیار S3
MRF	۳۲۲۶	۵۲	۱۷۶/۴۸۳	(۲)	(۲)	(۲)
MRE	۳۹۵۶	۶۲	۲۱۶/۴۶۶	(۳)	(۳)	(۳)
MDI	-	-	-	-	-	-
MKE	-	-	-	-	-	-
MEW	۳۶۳۲	۵۳	۱۹۹/۰۰۹	(۴)	(۴)	(۴)
ZWI	-	-	-	-	-	-
MEWaKE	۴۲۳۶	۷۱	۲۳۰/۷۳۱	(۱)	(۱)	(۱)



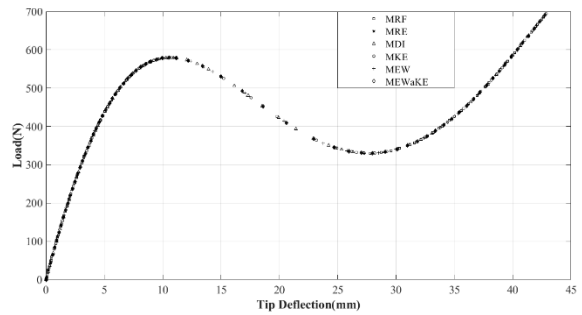
(الف) خیز گره‌ی ۱



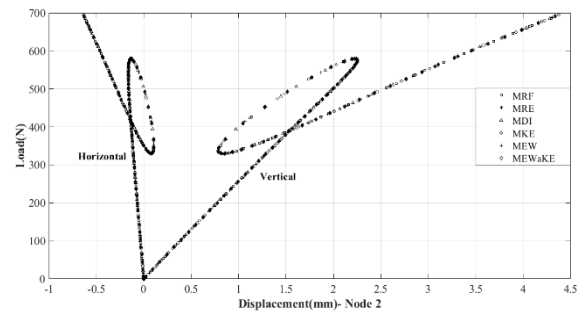
(ب) جابه‌جایی گره‌ی ۲

شکل ۹- مسیر ایستایی قاب ستاره‌ای با اثر برش

تحلیل پوسته‌ها بررسی می‌شود. برای این کار، سقف استوانه‌ای شکل (۱۰) تحلیل می‌گردد. دو لبه‌ی راستای Y ، تکیه‌گاه ساده و دو لبه‌ی دیگر، آزاد هستند. به سبب تقارن، یک چهارم پوسته تحلیل می‌شود. برای این کار، ۱۰۰ جزء به کار می‌رود. ضریب کشسانی $3/10275$ گیگاپاسکال، نسبت پواسون $0/3$ و ضخامت $12/7$ میلی‌متر می‌باشند [۵۴]. یک بار نقطه‌ای در راستای Z در گره‌ی A وارد می‌شود. شکل (۱۱) نمودار بار-خیز گره‌های A و B را نمایش می‌دهد. این پوسته دارای ۲ نقطه‌ی بازگشت بار می‌باشد. نخستین نقطه‌ی حدی در نیروی $2/225169$ کیلونیوتن جا دارد. خیز نقطه‌های A و B در این نقطه‌ی حدی، به ترتیب، $4/7326$ و $10/7823$ میلی‌متر به دست آمدند. پس از



(الف) خیز گره‌ی نوک



(ب) جابه‌جایی گره‌ی ۲

شکل ۸- مسیر ایستایی قاب ستاره‌ای بدون اثر برش

۴-۵- قاب ستاره‌ای با اثر برش

اکنون، تحلیل قاب ستاره‌ای پیشین با اثر برش انجام می‌پذیرد. پیش از این، میک و تان این سازه را تحلیل کردند [۵۳]. مشخصه‌های هندسی این قاب‌ها مانند قبل است. افزون بر این، ضریب کشسانی و ضریب برشی، به ترتیب، 303000 و 109600 نیوتن بر سانتی‌متر مربع هستند. نیروی P در گره‌ی نوک وارد می‌شود.

رتبه‌ی فرآیندهای به کار رفته برای تحلیل قاب در جدول (۷) درج شده‌اند. بر این پایه، شیوه‌های MRF، MEWaKE، MRE و MEW رده‌های نخستین تا چهارم را دارند. افزون بر این، راهکارهای MDI، MKE و ZWI توانایی تحلیل این قاب را نداشتند. شکل (۹) نمودارهای بار-جابه‌جایی گره‌های ۱ و ۲ را نشان می‌دهد که با مرجع [۵۳] هماهنگی دارد. این سازه در نیروهایی، به ترتیب، برابر با $599/698$ و $373/771$ نیوتن دارای نقطه‌ی حدی بار است. خیز نوک در این نیروها، به ترتیب، $11/032$ و $26/891$ میلی‌متر بود. افزون بر این‌ها، سازه دارای یک نقطه‌ی حدی تغییر مکان در باری برابر $448/2955$ نیوتن می‌باشد. هنگامی این بار به دست می‌آید که خیز گره‌ی ۲ برابر $0/354$ میلی‌متر باشد.

۴-۶- سقف استوانه‌ای

در بخش دیگری از این پژوهش، توانایی روش نویسندگان در

جدول ۸- امتیاز و رتبه‌ی روش‌ها برای سقف استوانه‌ای

روش	تکرار	نقاط همگرا	زمان (ثانیه)	معیار S1	معیار S2	معیار S3
MRF	۹۱۵۴۲	۳۷	۵۱۴/۷۲۳	(۷)	(۷)	(۷)
MRE	۵۲۱۴۶۲	۱۲۳	۳۱۹۰/۵۳	(۴)	(۳)	(۵)
MDI	۷۷۳۰۹۰	۱۷۴	۴۸۷۷/۴۹	(۵)	(۶)	(۶)
MKE	۷۷۳۰۹۰	۱۷۳	۴۳۱۱/۶۷	(۶)	(۱)	(۳)
MEW	۴۷۷۷۶۱	۱۲۳	۲۷۶۶/۱۰	(۲)	(۲)	(۱)
ZWI	۶۷۵۵۷۴	۱۷۴	۴۲۲۰/۶۹	(۱)	(۴)	(۲)
MEWaKE	۶۳۱۵۱۸	۱۵۳	۳۹۵۸/۴۸	(۳)	(۵)	(۴)

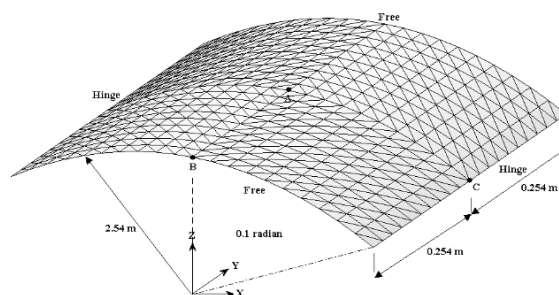
عامل بیان می‌دارد که راه‌کار i چند بار رتبه‌ی z را به دست آورده است. برای نمونه، شیوه‌ی MEWaKE، از نگاه معیار S1، سه بار نخستین فن می‌باشد. بنابراین، Q_{i1} برای این راه‌حل برابر سه است. همچنین، فرایند MDI دو بار رتبه‌ی چهارم را بر پایه‌ی معیاری S2 دارد. از این رو، Q_{i4} برای این روش برابر دو می‌باشد. شمار سازه‌هایی که راه‌کار i قادر به تحلیل آن‌ها نبوده است با Q_{i0} نمایش داده می‌شود. برای نمونه، در پنج مسأله شیوه‌ی ZWI توانایی رسیدن به پاسخ را ندارد. پس، Q_{i0} برای آن برابر پنج است.

هنگامی که فرایندی توانایی رسیدن به پاسخ را نداشته باشد، در رابطه‌ی (۲۴) وارد نمی‌گردد. همچنین، اگر یک فن در همه‌ی ۶ نمونه‌ی حل شده رتبه‌ی نخست را دارا باشد عدد ۴۲ به دست می‌آید. در نتیجه، امتیاز S_{ij} برای آن ۱۰۰ خواهد بود. امتیاز و رتبه‌ی پایانی راه‌حل‌ها در جداول (۹) تا (۱۱) نوشته شده‌اند. بر این پایه، رتبه‌بندی روش‌ها در جدول (۱۲) می‌آید. این جدول نشان می‌دهد راه‌کار نویسندگان، در هر سه معیار رتبه‌ی نخست را دارد. پس از آن، فرایندهای MRE و MRF، به ترتیب، در جایگاه‌های دوم و سوم جای می‌گیرند. جدول (۱۲) بیان می‌کند که شیوه‌ی ZWI بدترین فن برای پیمایش مسیر ایستایی است.

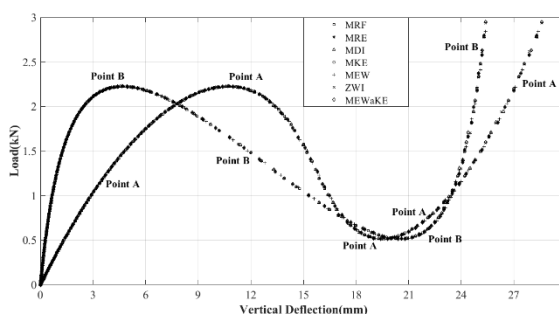
جدول ۹- امتیاز روش‌ها بر پایه‌ی معیاری S1

روش	Q_{ij}							S
	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
MRF	۱	۲	۱				۱	۵۴/۷۶۲
MRE				۱	۲	۲		۶۹/۰۴۸
MDI					۱	۲		۴۵/۲۳۸
MKE	۲		۱		۱		۲	۳۳/۳۳۳
MEW				۱	۱	۱		۴۲/۸۵۷
ZWI		۵						۱۶/۶۶۷
MEWaKE			۳	۲	۱			۹۰/۴۷۶

این بار، سازه وارد بخش پس کماشی می‌شود. نقطه‌ی بازگشت نیروی دیگر، در مقدار بار ۰/۵۱۶۴۵۶ کیلونیوتن رخ داد. جابه‌جایی‌های مورد اشاره، به ترتیب، ۲۰/۶۰۸۴ و ۱۹/۵۷۵۴ میلی‌متر بودند. شمار نمونه‌های همگرایی میان نقطه‌های حدی بار در شیوه‌های MRF، MRE، MDI، MKE، MEW، ZWI و MEWaKE، به ترتیب، ۷، ۲۵، ۳۶، ۳۶، ۲۵، ۳۶ و ۳۱ است.



شکل ۱۰- سقف استوانه‌ای



شکل ۱۱- نمودار بار-جابه‌جایی برای سقف استوانه‌ای

جدول (۸) نتیجه‌های تحلیل این سقف را نشان می‌دهد. روش MRF شمار بسیار کمی نقطه‌ی همگرایی به دست آورده است. به سخن دیگر، این شیوه دارای کمترین دقت می‌باشد. با وجود این، همه‌ی مسیر ایستایی را پیمایش کرد. از این رو، فرایند MRF آخرین رتبه را دارد. بر پایه‌ی جدول (۸)، راه‌کار MEW برترین راه‌حل برای این سقف استوانه‌ای می‌باشد.

۵- رتبه‌بندی روش‌ها

بر پایه‌ی شمار تکرارها، شمار نمونه‌های همگرایی و زمان تحلیل، مرتبه‌ی هر راه‌کار برآورد شد. برای مقایسه راه‌حل‌ها، امتیاز هر فرایند از برابری (۲۴) به دست می‌آید.

$$S_{ij} = 100 \times \sum_{j=1}^7 Q_{ij} \times (8-j)/42 \quad (24)$$

نماد Q_{ij} رتبه‌های z روش i را نشان می‌دهد. به سخن دیگر، این

جدول ۱۰- امتیاز روش‌ها بر پایه‌ی معیاری S2

روش	Q_{ij}								S
	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	
MRF	۱		۱		۱	۱	۱	۱	۳۸/۰۹۵
MRE		۱	۲	۲	۱				۷۸/۵۷۱
MDI			۱	۱	۱	۱	۱		۴۷/۶۱۹
MKE	۲	۱	۱	۲					۵۴/۷۶۲
MEW			۱	۱	۱		۱		۴۰/۴۷۶
ZWI					۱				۹/۵۲۳۸
MEWAKE		۴				۲			۸۰/۹۵۲

جدول ۱۱- امتیاز روش‌ها بر پایه‌ی معیاری S3

روش	Q_{ij}								S
	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	
MRF	۱	۱	۲				۱	۱	۵۲/۳۸۱
MRE			۱	۳	۱	۱			۶۶/۶۶۷
MDI				۱	۲		۲		۴۰/۴۷۶
MKE	۲		۱	۱		۲			۴۰/۴۷۶
MEW		۱		۱	۱	۱			۴۵/۲۳۸
ZWI									۱۴/۲۸۶
MEWAKE		۴	۱		۱				۹۰/۴۷۶

جدول ۱۲- رتبه‌بندی روش‌ها برای هر سنجش

معیار	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
S1	MEWAKE	MRE	MRF	MDI	MEW	MKE	ZWI
S2	MEWAKE	MRE	MKE	MDI	MEW	MRF	ZWI
S3	MEWAKE	MRE	MRF	MEW	MDI & MKE	ZWI	-

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، رابطه‌سازی نوینی برای پیمایش مسیر ایستایی با روش رهایی پویا پیشنهاد شد. پایه‌ی این کار بر کمینه کردن مجموع نمو کار و انرژی جنبشی در تکرارها استوار است. این فن توانایی پیمایش مسیرهای ایستایی در سازه‌های دارای ناحیه‌های بازگشت بار و تغییر مکان، را دارد. نخست، به شیوه‌ی رهایی پویا و رابطه‌های آن پرداخته شد. سپس، راهکارهایی آمدند که تاکنون برای یافتن عامل بار پژوهشگران داده‌اند. در ادامه، رابطه‌ی پیشنهادی در دسترس قرار گرفت.

یافتن عامل بار در شیوه‌ی پیشنهادی خودکار و بدون شرط می‌باشد و در آن تنها از عامل‌های موجود در تکرارهای رهایی پویا استفاده می‌گردد. توانایی رابطه‌سازی پیشنهادی با تحلیل اجزای محدود چندین سازه شامل خرپاها، قاب‌ها و پوسته‌ها که

دارای رفتار ناخطی هندسی می‌باشند، انجام پذیرفت. کم بودن شمار نمونه‌های همگرایی سبب کاهش زمان تحلیل می‌شود. از سوی دیگر، برای یافتن مسیر ایستایی دقیق‌تر، زمان تحلیل افزایش می‌یابد. به همین سبب، معیار زمان نیز باید لحاظ گردد. خاطرنشان می‌کند، هدف اصلی این پژوهش افزون بر داشتن دقت و نداشتن پرش، زمان مناسب تحلیل روش رهایی پویا می‌باشد. از سه معیار سنجش برای مقایسه‌ی فن‌های پیشین و رابطه‌سازی پیشنهادی بهره‌جویی شد. پاسخ‌های عددی نشان می‌دهند، دقت شیوه‌ی نویسندگان برای پیمایش مسیرهای ایستایی در تمام مسأله‌ها بیشتر از دو روش MRF و MRE است. از سوی دیگر، دقت این فرآیند اندکی کمتر از فن‌های MDI و MKE بود. باید دانست، دقت بیشتر این راهکارها سبب افزایش نقطه‌های همگرایی و در نتیجه افزایش زمان تحلیل می‌گردد. با بررسی هم‌زمان شمار نقطه‌های همگرایی، شمار کل تکرارها و زمان کل تحلیل، نشان داده شد که راه‌حل پیشنهادی نسبت به رابطه‌های پیشین توانایی مناسب‌تری دارد.

۷- مراجع

- [1] Novoselac, S., Ergić, T. and Baličević, P. (2012), "Linear and nonlinear buckling and post buckling analysis of a bar with the influence of imperfections", Tehnički vjesnik, Vol. 19, pp. 695-701.
- [2] Rezaiee-Pajand, M., Vejdani Noghreiyani, H.R. and Naghavi, A.R. (2013), "Four new methods for finding structural critical points", Mechanics Based Design of Structures and Machines, Vol. 41, pp. 399-420.
- [3] Alamatian, J. (2013), "Displacement-based methods for calculating the buckling load and tracing the post-buckling regions with dynamic relaxation method", Computers & Structures, Vol. 114, pp. 11584-11597.
- [4] Chen, C.N. (1996), "A finite element study on bifurcation and limit point buckling of elastic-plastic arches", Computers & Structures, Vol. 60, pp. 189-196.
- [5] Pi, Y.L. and Bradford, M.A. (2014), "Multiple unstable equilibrium branches and non-linear dynamic buckling of shallow arches", International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 60, pp. 33-45.
- [6] Szilard, R. (1985), "Critical load and post-buckling analysis by fem using energy balancing technique", Computers & Structures, Vol. 20, pp. 277-286.
- [7] Rezaiee, H. (2012), "Nonlinear structural analysis using dynamic relaxation method", Master's Thesis, Ferdowsi University, Mashhad, Iran.
- [8] Krenk, S. and Hededal, O. (1995), "A dual orthogonality procedure for non-linear finite element equations", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 123, pp. 95-107.
- [9] Rezaiee-Pajand, M. and Boroshaki, F. (1999), "A variable arc-length method", Asian Journal of Structural Engineering, pp. 321-44.
- [10] Kim, J.H. and Kim, Y.H. (2001), "A predictor-corrector method for structural nonlinear analysis", Computer



- [28] Namadchi, A.H. and Alamatian, J. (2016), "Explicit dynamic analysis using dynamic relaxation method", *Computers & Structures*, Vol. 175, pp. 91-99.
- [29] Rezaiee-Pajand, M., Alamatian, J. and Rezaee, H. (2017), "The state of the art in Dynamic Relaxation methods for structural mechanics Part 1: Formulations", *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, Vol. 7, pp. 65-86.
- [30] Rezaiee-Pajand, M., Alamatian, J. and Rezaee, H. (2017), "The state of the art in Dynamic Relaxation methods for structural mechanics Part 2: Applications", *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, Vol. 7, pp. 87-114.
- [31] Jung, S., Kim, T.-Y. and Yoo, W.-S. (2018), "Adaptive step-size control for dynamic relaxation using continuous kinetic damping", *Mathematical Problems in Engineering*.
- [۳۲] سرافرازی، س.ر. و لبافی، س.ف. (۱۳۹۶)، "روش رهایی پویا با میرایی متمرکز"، *مهندسی عمران مدرس*، دوره ۱۷، شماره ۳، ص. ۱۵۶-۱۴۶.
- [33] Zardi, I. and Alamatian, J. (2020), "A new formulation for fictitious mass of viscous dynamic relaxation method", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, Vol. 48, pp. 542-567.
- [34] Abbasi, M., Namadchi, A.H. and Alamatian, J. (2021), "A new formulation for kinetic dynamic relaxation method based on the Lagrangian interpolation", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, pp. 1-15.
- [35] Zhang, L.G. and Yu, T.X. (1989), "Modified adaptive dynamic relaxation method and its application to elastic-plastic bending and wrinkling of circular plates", *Computers & Structures*, Vol. 33, pp. 609-614.
- [36] Kadkhodayan, M., Zhang, L.C. and Sowerby, R. (1997), "Analyses of wrinkling and buckling of elastic plates by DXDR method", *Computers & Structures*, Vol. 65, pp. 561-574.
- [37] Ramesh, G. and Krishnamoorthy, C.S. (1993), "Post-buckling analysis of structures by dynamic relaxation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 1339-1364.
- [38] Ramesh, G. and Krishnamoorthy, C.S. (1994), "Inelastic post-buckling analysis of truss structures by dynamic relaxation method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 3633-3657.
- [39] Lee, K.-S., Han, S.-E. and Hong, J.-W. (2014), "Post-buckling analysis of space frames using concept of hybrid arc-length methods", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 58, pp. 76-88.
- [40] Lee, K.S., Han, S.E. and Park, T. (2011), "A simple explicit arc-length method using the dynamic relaxation method with kinetic damping", *Computers & Structures*, Vol. 89, pp. 216-233.
- [۴۱] گلمکانی م.ا. و یوسفیان ثقی، ع. (۱۳۹۳)، "تحلیل غیر خطی ترموالاستیک صفحات گرد ساندویچی با هسته تابعی"، *مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها*، دوره ۴، شماره ۴، ص. ۱۴۲-۱۲۷.
- [42] Rezaiee-Pajand, M. and Alamatian, J. (2009), "Dynamic relaxation method for tracing the statical path of truss structures", *Journal of Modeling in Engineering*, Vol. 3, pp. 27-39.
- [43] Rezaiee-Pajand, M. and Alamatian, J. (2011), "Automatic DR structural analysis of snap-through and snap-back using optimized load increments", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 137, pp. 109-116.
- [44] Rezaiee-Pajand, M. and Estiri, H. (2016), "Finding equilibrium paths by minimizing external work in Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 191, pp. 959-974.
- [11] Toklu, Y.C. (2004), "Nonlinear analysis of trusses through energy minimization", *Computers & Structures*, Vol. 82, pp. 1581-1589.
- [12] Ligarò, S.S. and Valvo, P.S. (2006), "Large displacement analysis of elastic pyramidal trusses", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, pp. 4867-4887.
- [13] Saffari, H. and Mansouri, I. (2011), "Non-linear analysis of structures using two-point method", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 46, pp. 834-840.
- [14] Underwood, P. (1983), "Dynamic relaxation (in structural transient analysis)", *Computational Methods for Transient Analysis (A 84-29160 12-64)* Amsterdam, North-Holland, pp. 245-265.
- [15] Munjiza, A. (1996), "A K^m proportional damping for dynamic relaxation", *International Journal for Engineering Modelling*, Vol. 9, pp. 1-9.
- [16] Munjiza, A., Owen, D.R.J. and Crook, A.J.L. (1998), "An $M(M^{-1}K)^m$ proportional damping in explicit integration of dynamic structural systems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 41, pp. 1277-1296.
- [17] Rezaiee-Pajand, M. and Taghavian Hakkak, M. (2006), "Nonlinear analysis of truss structures using dynamic relaxation", *International Journal of Engineering*, Vol. 19, pp. 11-22.
- [18] Kadkhodayan, M., Alamatian, J. and Turvey, G.J. (2008), "A new fictitious time for the dynamic relaxation (DXDR) method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 74, pp. 996-1018.
- [19] Rezaiee-Pajand, M. and Alamatian, J. (2008), "Nonlinear dynamic analysis by dynamic relaxation method", *Structural Engineering & Mechanics*, Vol. 28, pp. 549-570.
- [20] Rezaiee-Pajand, M. and Sarafrazi, S.R. (2010), "Nonlinear structural analysis using dynamic relaxation method with improved convergence rate", *International Journal of Computational Methods*, Vol. 7, pp. 627-654.
- [21] Rezaiee-Pajand, M. and Alamatian, J. (2010), "The dynamic relaxation method using new formulation for fictitious mass and damping", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 34, pp. 109-133.
- [22] Rezaiee-Pajand, M., Kadkhodayan, M., Alamatian, J. and Zhang, L.C. (2011), "A new method of fictitious viscous damping determination for the dynamic relaxation method", *Computers & Structures*, Vol. 89, pp. 783-794.
- [23] Rezaiee-Pajand, M. and Sarafrazi, S.R. (2011), "Nonlinear dynamic structural analysis using dynamic relaxation with zero damping", *Computers & Structures*, Vol. 89, pp. 1274-1285.
- [24] Rezaiee-Pajand, M., Kadkhodayan, M. and Alamatian, J. (2012), "Timestep selection for dynamic relaxation method", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, Vol. 40, pp. 42-72.
- [25] Rezaiee-Pajand, M., Sarafrazi, S.R. and Rezaiee, H. (2012), "Efficiency of dynamic relaxation methods in nonlinear analysis of truss and frame structures", *Computers & Structures*, Vol. 112-113, pp. 295-310.
- [26] Rezaiee-Pajand, M. and Rezaee, H. (2012), "Fictitious time step for the kinetic dynamic relaxation method", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 21, pp. 631-644.
- [27] Alamatian, J. (2012), "A new formulation for fictitious mass of the Dynamic Relaxation method with kinetic damping", *Computers & Structures*, Vol. 90, pp. 42-54.



- dynamic relaxation method", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 40, pp. 10300-10322.
- [45] Rezaiee-Pajand, M. and Estiri, H. (2016), "Computing the structural buckling limit load by using dynamic relaxation method", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 81, pp. 245-260.
- [۴۶] علامتیان، ج. و حسینی نژاد گوشیک، س.م. (۱۳۹۶)، "روش رهایی پویا برای محاسبه بار کمانشی قاب‌ها"، *نشریه مهندسی عمران و محیط زیست* دانشگاه تبریز، دوره ۴۹، شماره ۹۶، ص. ۷۴-۶۵.
- [47] Rezaiee-Pajand, M. and Estiri, H. (2020), "Finding buckling points for nonlinear structures by dynamic relaxation scheme", *Frontiers of Structural and Civil Engineering*, Vol. 14, pp. 23-61.
- [48] Rezaiee-Pajand, M. and Mohammadi-Khatami, M. (2021), "Nonlinear analysis of cable structures using the dynamic relaxation method", *Frontiers of Structural and Civil Engineering*, Vol. 15, pp. 253-274.
- [49] Taghavian Hakak, M. (2003), "Nonlinear analysis of truss structures using dynamic relaxation method", Master of science Thesis, Islamic Azad University University (Kerman Branch), Kerman, Iran.
- [50] Greco, M., Menin, R., Ferreira, I. and Barros, F. (2012), "Comparison between two geometrical nonlinear methods for truss analyses", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 41, pp. 735-750.
- [51] Krishnamoorthy, C.S., Ramesh, G. and Dinesh, K.U. (1996), "Post-buckling analysis of structures by three-parameter constrained solution techniques", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 22, pp. 109-142.
- [52] Williams, F. (1964), "An approach to the non-linear behaviour of the members of a rigid jointed plane framework with finite deflections", *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 17, pp. 451-469.
- [53] Meek, J.L. and Tan, H.S. (1984), "Geometrically nonlinear analysis of space frames by an incremental iterative technique", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 47, pp. 261-282.
- [54] Sze, K.Y., Liu, X.H. and Lo, S.H. (2004), "Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 40, pp. 1551-1569.