



بار کمانش خمشی ارتجاعی ستون‌های با مقطع متغیر در قاب‌های شیب‌دار آزاد در برابر حرکت جانبی با روش‌های تفاضلات محدود و کار مجازی

علی اصغر صفوی^۱، عباس حق‌اللهی^۲، موسی محمودی صاحبی^۳
(تاریخ دریافت: ۹۴/۰۹/۰۶، تاریخ پذیرش: ۹۵/۰۲/۱۵)

چکیده

در این مقاله تعیین بار کمانش خمشی ستون‌های با مقطع متغیر با روشی خاص ارائه می‌گردد (کمانش درون صفحه قاب). مسئله‌ی مورد نظر به صورت قاب یک دهانه متقارن با تکیه‌گاه‌های مفصلی یا گیردار بررسی می‌شود. تحلیل مسئله بر اساس روش تفاضلات محدود و روش کار مجازی انجام می‌شود. به این صورت که طول ستون به n تکه تقسیم می‌شود و صورت تفاضل محدودی معادله دیفرانسیل برای جابجایی جانبی نقاط مرزی تکه‌ها نوشته می‌شود. با این کار $n-1$ معادله حاوی n متغیر (جابجایی نقاط) به دست می‌آید. کمبود یک معادله به خاطر نداشتن شرط مرزی در سر ستون است که با استفاده از روش کار مجازی معادله‌ی مورد نیاز حاصل می‌شود. در مینان ماتریس ضرایب متناظر با دستگاه معادلات، مساوی با صفر قرار داده می‌شود و بار بحرانی به دست می‌آید. نتایج تحلیل درباره تعدادی مسئله گزارش گردیده و با نتایج حاصل از مطالعه سایر محققین مقایسه شده است. مقایسه نشان می‌دهد که روش ارائه شده با تقریبی مناسب بار بحرانی قاب مورد بررسی را به دست می‌دهد و این فرمول‌بندی قابل تعمیم به سایر قاب‌هایی که از اعضای با مقطع متغیر ساخته شده‌اند، می‌باشد.

کلمات کلیدی

قاب شیب‌دار، ستون‌های با مقطع متغیر، روش تفاضلات محدود، روش کار مجازی

Elastic Flexural Buckling Load for Tapered Columns in Gabled Frames for State of Free to Sway with Finite Differences and Virtual Work Methods

A. Safavi, A. Haghollahi, M. Mahmoudi Sahebi

ABSTRACT

In this paper flexural buckling load for tapered columns has been evaluated (in-plane buckling of frame). The studied issue is a one-bay frame, its two bases are hinged or rigid, and sway is permitted. The analysis is done by finite differences and virtual work methods. First the length column divided into "n" pieces and the deformation differential equation is approximated in form of finite differences. In this process "n-1" linear equations are obtained which are composed of "n" variables. The variables are the lateral displacement of specified points on the length of the column. For the continuation of the problem an equation is required. It can be gained by the virtual work and consideration of the displacement boundary condition in the top of the column. When the corresponding square matrix of the equations collection is available the critical load will be calculated. The equation obtained by equating the determinate of that matrix to zero has "n" roots. The minimum root is the critical load. The results of the analysis are compared with the other methods of other researchers in some examples. The comparison showed that the introduced method can calculate the critical load with a good accuracy. This method can be generalized for other frames made of tapered members.

KEYWORDS

Gabled frames, Tapered columns, Finite differences method, Virtual work method

- ۱- دانشجوی دکتری مهندسی عمران-سازه، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، aasafavy@yahoo.com
- ۲- استادیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، haghollahi@srttu.edu (نویسنده مسئول)
- ۳- دانشیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، m.mahmoudi@srttu.edu



اولر برای به دست آوردن بار بحرانی یک ستون دو سر مفصل با مقطع ثابت از معادله دیفرانسیل حاکم بر تغییر شکل جانبی ستون استفاده نمود. این معادله برای اعضای منشوری دارای جواب دقیق و تحلیلی است، اما برای عضوی که ممان اینرسی مقطع آن در طول تغییر می‌کند به دست آوردن حل دقیق آن بسیار مشکل یا غیرممکن است. در این حالت می‌توان از روش‌های تقریبی استفاده کرد. اولین راه‌حل‌های به ثبت رسیده برای محاسبه‌ی بار بحرانی کمانش ارتجاعی ستون‌های ماهیچه‌ای شامل راه‌حل‌های تیموشنکو، موری و دینیک است که همه آن روش‌ها تقریبی بوده و ستون ماهیچه‌ای را با ستون‌های پله‌ای تقریب می‌زدند [۳-۱]. اولین بار حل دقیق برای محاسبه‌ی بار بحرانی کمانش ارتجاعی ستون‌های با مقطع متغیر توسط Gere و Carter با استفاده از توابع بسل ارائه گردید [۴]. از راه‌حل‌های اخیر با روش تفاضلات محدود، کار Iremonger و از روش اجزای محدود روش Karabalis و Beskos را می‌توان نام برد [۵ و ۶].

Brown با تحلیل تغییرشکل‌های بال‌های تیر I شکل غیرمنشوری در پیچش، معادله دیفرانسیل تغییرشکل مقطع را در پیچش غیریکنواخت بدست آورد. او معادله‌ی بدست آمده را در بررسی کمانش خمشی-پیچشی تیر غیرمنشوری با تکیه‌گاه‌های ساده مورد استفاده قرار داد و مشاهده کرد در اعضای با مقطع متغیر که بال آنها در طول عضو ثابت است، تاثیر تغییرات ابعاد جان در سختی پیچشی و در نتیجه کمانش پیچشی اندک است. ایشان برای امتحان نتایج بدست آمده آزمایشهایی روی تیرهای دو سر ساده با تغییرات در ابعاد جان و بال انجام داده و مشاهده نمودند نتایج آزمایشگاهی، به خوبی نتایج تئوری مسئله را تایید می‌کنند [۷]. Ermopoulos و Kounadis به پایداری قاب‌های با مقاطع متغیر پرداختند. آنها روشی را برای پیدا کردن ماتریس سختی خمشی معادل عضو مقطع متغیر ارائه نمودند و تابع تغییرشکل عضو منشوری معادل را برای تابع تغییرشکل یک عضو غیرمنشوری، در نظر گرفتند. با حل

مثال‌هایی نشان دادند که استفاده از روش آنها ساده و با دقتی قابل قبول همراه است [۸]. Ermopoulos در تحقیقی دیگر به پایداری قاب‌های با مقاطع متغیر پرداخت. پایداری اعضای با مقطع متغیر را -که تحت فشار توسط بارهای متمرکز در طول هستند- بررسی کرد. در آن تحقیق با فرمول‌بندی معادلات کمانش، بار بحرانی آنها محاسبه گردید و نتایج به صورت نمودارهایی ارائه شد. از نتایج قابل توجه این تحقیق طراحی بهینه اعضای غیرمنشوری فشاری می‌باشد [۹]. Banerjee و Williams تحقیقی را انجام دادند که نتیجه‌ی آن پاسخگوی دامنه‌ی وسیعی از اشکال هندسی سطح مقطع ستون‌های ماهیچه‌ای با تغییرات خطی ابعاد در تمام یا برخی از اجزای تشکیل دهنده‌ی مقطع (بال‌ها و یا جان) در طول عضو می‌باشد که می‌تواند دارای بارهای محوری متمرکز یا گسترده در طول عضو باشد [۱۰]. Yang پایداری تیرستون‌های I شکل غیرمنشوری را مورد بررسی قرار داد. در آن مطالعه رفتار قاب‌های صفحه‌ای بدون مهاربند -که از تیر و ستون‌های مقطع متغیر ساخته شده است- در تغییرشکل و حرکت جانبی قاب مورد بررسی قرار گرفت. ایشان در مقاله‌ی خود با اشاره به صرفه‌جویی مصالح در استفاده از اعضا با مقطع متغیر، استفاده از این اعضا را به عنوان یک روش مناسب برای مقابله با بارهای جانبی در سازه‌های موردنظر بیان کردند. در آن مقاله با ساختن ماتریس سختی عضو مقطع متغیر شش درجه آزاد که عمق آن به صورت خطی تغییر می‌کند، اثر تغییر مقطع در طول عضو روی سختی جانبی، مقاومت و ارتعاش آن مورد بحث قرار گرفته است. به علاوه مزایا و معایب استفاده از اعضای غیرمنشوری با اعضای منشوری مقایسه شده است [۱۱]. Bradford در مقاله‌ای پس از بدست آوردن معادلات تعادل یک تیر I شکل مقطع متغیر، تاثیر لنگر پیچشی را روی آن با فرمول‌بندی روش اجزای محدود بررسی کرد. ایشان در مقاله‌ی خود از روش کار مجازی، فرمول‌بندی لاگرانژین بهنگام شده استفاده کرد و تغییرشکل‌های غیرخطی هندسی را مورد ملاحظه قرار داد. در محاسبه‌ی تغییرشکل‌های



انتهایی تیر از فرض ولاسف^۱ در مقاطع جدارنازک استفاده کرد. ماتریس سختی خمشی و هندسی تیر - که از روش اجزای محدود حاصل شد- برای بررسی کمانش و تغییرشکل آفراینده در تغییرشکل‌های بزرگ مناسب تشخیص داده شده‌اند و با استفاده از روش بیان شده در این مقاله می‌توان مسائل ناپایداری خمشی-پیچشی را مورد بررسی قرار داد [۱۲]. Williams و Aston با استفاده از روش اجزای محدود کمانش پیچشی-خمشی تیرستون I شکل غیرمنشوری را مورد بررسی قرار دادند. آنها در تحقیق خود اثر پیچش و خمش را بصورت همزمان مطالعه کردند و برای ساده‌سازی مسئله، محور میانی جان را به عنوان یک محور مقطع - که حول آن مقطع دچار پیچیدگی می‌شود- در نظر گرفتند و نشان دادند با این ساده‌سازی، فرمول‌بندی مسئله محدودیت سایر راه‌حلها از جمله استفاده از جزء منشوری و تفاضلات محدود را نخواهد داشت. ایشان با ساخت ماتریسهای سختی فرمولهای لازم را بدست آوردند و کاربرد روش خود را برای کمانش یک تیر کنسول مقطع متغیر بیان کردند [۱۳]. Al-Gahtani در مقاله‌ای بر اساس روشهای انرژی رفتار تیرستونهای مقطع متغیر را در خمش و کمانش مورد مطالعه قرار داد. وی از آنالیز کمانش ناگهانی^۲ در مطالعه پایداری سازه‌ها استفاده نمود و به این نتیجه رسید که اگرچه ستون‌های با مقطع متغیر ممکن است بار بحرانی بیشتری از ستون‌های منشوری هم‌وزن خود داشته‌باشند، اما استفاده از آنها در قاب‌های فضایی ممکن است بار بحرانی ناشی از کمانش ناگهانی کل سازه را کاهش دهد. در مثال‌هایی نشان داد روش پیشنهادی وی از روش‌های تقریبی همچون فن انتگرالگیری عددی^۳ و استفاده از جزء منشوری، کاراتر و دقیق‌تر می‌باشد [۱۴]. Asgarian و همکارانش [۱۵] مسئله کمانش جانبی-پیچشی تیرهای با مقطع دلخواه و متغیر در طول را بررسی کردند. ایشان از روش متکی بر سری‌های توانی بهره گرفتند و انرژی پتانسیل کل را با

توجه به انرژی ارتجاعی و کار بارهای خارجی محاسبه کردند. تقریب سری‌های توانی برای حل معادلات دیفرانسیل از مرتبه ۴ مورد استفاده واقع شد. بارهای کمانش جانبی با حل مسئله مقدار ویژه محاسبه شد. Bradford و Valipour [۱۶] در پژوهشی تابع شکل تیر با مقطع متغیر و تکیه گاه‌های ارتجاعی را معرفی کردند. آنها در این تحقیق از اصل کار مجازی استفاده کردند و فرمول بندی را بر اساس فرض اویلر- برنولی، رفتار ارتجاعی برای مصالح و عدم رخداد کمانش موضعی به دست آوردند. نهایتاً دقت و کارایی روش خود را با روش استفاده از توابع شکل هریمیتی و روش سایر محققین مقایسه کردند. Konstantakopoulos و همکارانش [۱۷] پایداری یک تیر ستون تنها را با انواع اشکال تغییر مقطع در طول عضو بررسی کردند. از جمله اشکال تغییر مقطع در طول عضو می‌توان به صور پله‌ای، شیب دار به یک سمت و افزایش عمق عضو از طرفین به سمت میانه طول تیر اشاره کرد. ایشان در طرفین تیرستون مزبور تکیه گاه‌های مفصلی و غلطکی قرار داده، علاوه بر نیروی فشاری اعمالی، اثر لنگرها، نیروهای محوری متمرکز و تغییرشکل‌های اولیه را در تحلیل مسئله بررسی کردند. حل معادله دیفرانسیل تغییرشکل ستون در حضور عوامل گفته شده با روش تقریبی و تقریب جواب به صورت سری حاوی جملات سینوسی انجام گرفت. آنچه تاکنون اشاره شد، تحقیقات انجام شده روی ستون‌های ماهیچه‌ای منفرد بود. تنها تحقیقات انجام شده روی رفتار و پایداری ستون‌های ماهیچه‌ای -تشکیل دهنده قاب‌ها-، شامل موارد زیر است:

الف- راه‌حل تقریبی Lee و همکارانش [۱۸] که با استفاده از روش ریلی-ریتز و با الهام از روش سریهای توانی و حساب تغییرات انجام شده که نتیجه‌ی آن یک سری نمودار با علائم و پارامترهای مشابه نمودارهای ژولیان و لورنس بوده‌است. در این روش قاب موردنظر با اعضای مقطع متغیر به یک قاب ساده‌ی چهارگوش -که دارای دو ستون (در طرفین) و دو تیر (در بالا و پایین) است- تبدیل می‌شود. در قاب جدید ستون‌ها همان ستون‌های قاب قبلی

¹ Vlasov

² Snap-through analysis

³ Numerical integration technique



و تیرها دارای مقطع ثابت هستند، ممان اینرسی تیر بالا بر مبنای سختی تیرهای متصل به سر ستون‌ها و ممان اینرسی تیر پایین بر مبنای صلبیت خمشی تکیه‌گاه پای ستون‌ها تعیین می‌شود. آنگاه ماتریس سختی قاب جدید در دو حالت حرکت جانبی آزاد و مقید ساخته شده که از برابر قرار دادن دترمینان ماتریس سختی با صفر معادله‌ای حاصل می‌شود که کمترین ریشه‌ی آن بار بحرانی است.

ب- راه حل تقریبی پیشنهادی Irani [۱۹] با یک سری فرضیات و حل معادله‌ی دیفرانسیل تقریبی کمانش قاب با اعمال شرایط تعادل و پیوستگی در گره‌های آن. در این روش با به دست آمدن ماتریس سختی کل سازه بر اساس جواب معادله دیفرانسیل تغییرشکل ستون، بار بحرانی ستون‌های قاب به دست آمد.

ج- Karabalis و Bazeos [۲۰] برای محاسبه‌ی بار بحرانی قاب‌های صفحه‌ای دارای اعضای با مقطع متغیر روشی تقریبی ارائه کردند که در آن ستون دارای مقطع متغیر با ستونی معادل جایگزین می‌شود. ستون معادل، منشوری و هم‌طول با ستون اولیه است که ممان اینرسی آن (I_{cr}) با محاسبه و استفاده از نمودارهایی بدون بعد تعیین می‌شود. ایشان در این راه، ماتریس سختی کل سازه را بر اساس جواب معادله دیفرانسیل تغییرشکل ستون به دست آوردند و از آن برای تعیین بار بحرانی ستون‌های قاب استفاده کردند.

د- Saffari و همکارانش [۲۱] با در نظر گرفتن سهمی درجه‌ی دو برای تغییرات تابع ممان اینرسی ستون و تیر در یک قاب شیب‌دار یک دهانه‌ی متقارن، مسئله را بررسی کرده و حاصل تلاش آنها نمودارهای بدون بعد بوده است. در مدل هندسی آن‌ها، تیرها و ستون‌ها از اعضای I شکل با مقطع متغیر ساخته شده‌اند و تیرهای مورب در تمام طول غیر منشوری هستند (برخلاف خیلی از سوله‌ها که بخشی از طول تیرها منشوری است).

در مقاله حاضر برای به دست آوردن بار بحرانی ستون‌های سوله‌های متقارن تک‌دهانه‌ای که در برابر حرکت جانبی مقید نیستند، از معادله دیفرانسیل تغییرشکل استفاده می‌شود. برای حل این معادله روش تفاضل محدود به کار

بسته می‌شود. به این صورت که طول ستون به n تکه تقسیم می‌شود و صورت تفاضل محدودی معادله دیفرانسیل برای جابجایی جانبی نقاط مرزی تکه‌ها نوشته می‌شود. با این کار $n-1$ معادله حاوی n متغیر (جابجایی نقاط) به دست می‌آید. کمبود یک معادله به خاطر نداشتن شرط مرزی در سر ستون است که با استفاده از روش کار مجازی معادله‌ی مورد نیاز یافته می‌شود. برای تعیین بار بحرانی، دترمینان ماتریس ضرایب متناظر با معادلات مزبور محاسبه شده و معادل با صفر قرار داده می‌شود. کمترین ریشه‌ی معادله‌ی اخیر همان بار بحرانی مود اول کمانش است.

۲- روش تفاضلات محدود

در این روش برای حل یک معادله دیفرانسیل طول محدوده‌ای که معادله‌ی دیفرانسیل در آن برقرار است، به بخش‌های مساوی تقسیم می‌شود و آنگاه مشتق مراتب مختلف تابع مجهول در هر نقطه بر حسب مقادیر آن تابع در نقاط طرفین آن نقطه نوشته می‌شود. تقریب‌های تفاضل بالایی، مرکزی و پایینی از مشتق y در نقطه‌ی i -ام به ترتیب، به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad (۱)$$

$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \quad (۲)$$

$$y'_i \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \quad (۳)$$

(h طول هر بازه است و y_i جابجایی جانبی در نقطه‌ی i -ام ستون). تفاضل مرکزی با همگرایی سریع‌تر و تقریب بهتری همراه است. برای تقریب مشتق مرتبه دوم با تفاضل مرکزی در نقطه i -ام می‌توان نوشت:

$$y''_i \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad (۴)$$

۳- تعیین بار کمانش خمشی ستون‌های قاب تک‌دهانه‌ی شیب‌دار، متقارن و با تکیه‌گاه‌های مفصلی که در برابر حرکت جانبی آزاد است (شکل (۱)).



$$M_i = Py_i = -EI_i y_i'' = -EI_i \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad (7)$$

با تعریف $A = (Ph^2)/E$ ، می‌توان رابطه‌ی زیر را نوشت:

$$y_{i-1}(I_i) + y_i(A - 2I_i) + y_{i+1}(I_i) = 0 \quad (8)$$

با جاگذاری مقادیر مختلف به جای i سه معادله‌ی بعدی نتیجه می‌شوند:

$$i = 1 \xrightarrow{y_0=0} y_1(A - 2I_1) + y_2(I_1) = 0 \quad (9)$$

$$i = 2 \rightarrow y_1(I_2) + y_2(A - 2I_2) + y_3(I_2) = 0 \quad (10)$$

$$i = n-1 \rightarrow y_{n-2}(I_{n-1}) + y_{n-1}(A - 2I_{n-1}) + y_n(I_{n-1}) = 0 \quad (11)$$

به این ترتیب $n-1$ معادله حاصل می‌شود، در صورتی که n متغیر $y_i (1 \leq i \leq n)$ وجود دارد.

از یکسان بودن دوران در سر ستون و ابتدای تیر، معادله‌ای دیگر به دست می‌آید (رابطه‌ی همساز)، به این ترتیب دستگاه معادلات $[K]_{n \times n} \{y\}_{n \times 1} = \{0\}_{n \times 1}$ ساخته می‌شود و با قرار دادن $|K| = 0$ ، n جواب برای P به دست می‌آید که کوچک‌ترین آنها بار بحرانی ستون‌های سوله است.

۳-۱- استفاده از روش کار مجازی برای به دست آوردن یک معادله دیگر

تلاش می‌شود با این روش، معادله‌ای برحسب y_n (جابجایی افقی سر ستون‌ها در اثر کمانش) به دست آید. بار مجازی واحد به صورت افقی به سر ستون وارد می‌شود. مطابق با شکل (۳)، بارگذاری مجازی با اصل رویهم‌گذاری به صورت مجموع بارگذاری دو سازه (I) و (II) نوشته می‌شود. با توجه به شکل (۴-الف و ب)، لنگر در نقاط متناظر اعضای نیمه راست و چپ سازه حقیقی کمانش یافته (شکل (۱)) هم‌جهت است.

$$M_{cw} = M_{ce} = M_c \quad (12)$$

$$M_{bw} = M_{be} = M_b$$

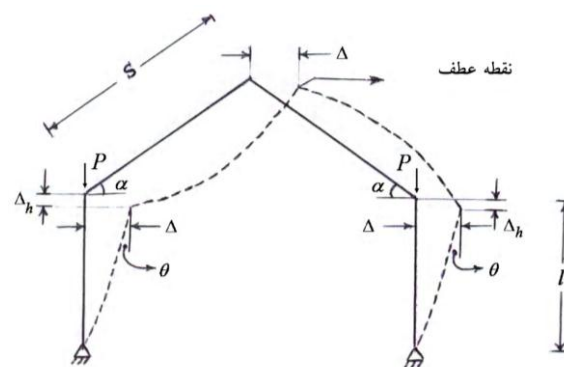
c اندیس ستون و b اندیس تیر است و مقصود از e و w به ترتیب قسمت راست و چپ سازه می‌باشد.

در این بخش قاب با تکیه‌گاه‌های مفصلی که متداول‌تر است، بررسی می‌شود و به قاب با تکیه‌گاه‌های گیردار در بخش بعدی پرداخته می‌شود. چون سازه متقارن است طول یکی از ستون‌ها را به n تکه‌ی مساوی تقسیم کرده، برای لنگر خمشی در نقطه‌ی i -ام می‌توان نوشت: (از این به بعد، علامت تساوی به جای تقریب به کار می‌رود).

$$M_i = -EI_i y_i'' = -EI_i \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad (5)$$

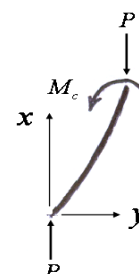
در این رابطه M_i ، I_i و y_i به ترتیب لنگر خمشی، ممان اینرسی و جابجایی جانبی نقطه i -ام ستون است. اندیس صفر را برای پای ستون (تکیه‌گاه مفصلی) در نظر گرفته، می‌توان نوشت:

$$y_0 = 0 \Rightarrow M_{i=1} = -EI_1 \frac{y_2 - 2y_1}{h^2} \quad (6)$$

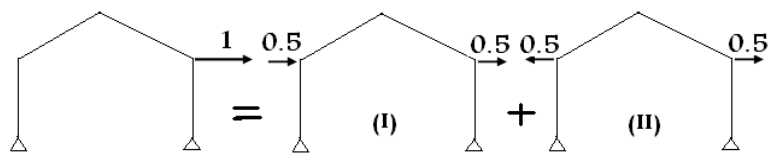


شکل (۱): وضعیت سوله پیش از کمانش (خطوط توپر) و پس از کمانش (خط چین)

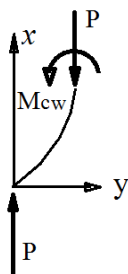
برای لنگر خمشی نقطه i -ام براساس شکل (۲) و معادله (۵)، رابطه (۷) به دست می‌آید.



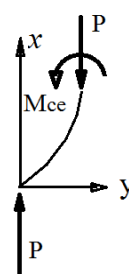
شکل (۲): دیاگرام آزاد قسمتی از ستون



شکل (۳): اعمال بار مجازی



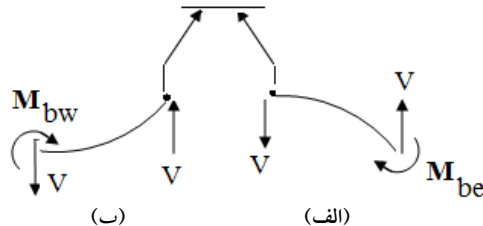
ب) دیاگرام آزاد بخشی از ستون چپ



الف) دیاگرام آزاد بخشی از ستون راست

شکل (۴): دیاگرام آزاد ستون‌ها در لحظه کمانش

راس سوله: نقطه عطف تغییر شکل



الف) بخشی از تیر سمت راست

ب) بخشی از تیر سمت چپ سازه، جدا شده از راس قاب شیب‌دار

شکل (۵): دیاگرام آزاد و تغییر شکل تیرها در حین تغییر شکل ناشی از کمانش

$$\sum m_c = (m_{cw} + m_{ce})_I + (m_{cw} + m_{ce})_{II} \quad (15)$$

$$\sum m_b = (m_{bw} + m_{be})_I + (m_{bw} + m_{be})_{II}$$

I_b و I_c به ترتیب ممان اینرسی در طول ستون و تیر می‌باشند.

اگر جهت لنگر داخلی تیر راست با تیر چپ و ستون راست با ستون چپ در قاب کمانش‌یافته - که دارای تقارن معکوس است - هم‌علامت فرض شود، آنگاه به خاطر تقارن مستقیم در سازه (II)، لنگر داخلی تیر راست با تیر چپ و ستون راست با ستون چپ مختلف‌العلامه خواهند بود. بنابراین (شکل (۵)):

طبق قضیه کار مجازی برای کل سازه، می‌توان نوشت:

$$1^* \times y_n = \sum \int \frac{mM}{EI} dx \quad (13)$$

m : لنگر داخلی اعضا (ناشی از بار واحد مجازی).

در سازه‌ی کمانش‌یافته لنگر خمشی در دو ستون یکسان و در دو تیر نیز یکسان است، (سازه‌ی کمانش‌یافته دارای تقارن معکوس از نظر لنگرهای داخلی اعضا است). بنابراین می‌توان سیگما را داخل انتگرال برد:

$$1^* \times y_n = \int \frac{M_c \sum m_c}{EI_c} dx + \int \frac{M_b \sum m_b}{EI_b} dx \quad (14)$$



$$(m_{bw} + m_{be})_I = \frac{1}{s} x \quad (20)$$

1: ارتفاع ستون. با تبدیل انتگرال اولی در معادله (۱۴) به سیگما و استفاده از معادلات (۱۷) تا (۲۰) داریم:

$$E y_n = P h^2 \sum_{i=1}^n \frac{i y_i}{I_i} + \frac{P y_n}{s^2} \int_0^s \frac{x^2}{I_b} dx \quad (21)$$

I_i ممان اینرسی ستون در نقطه‌ی i ام است. در ساده کردن معادله فوق تعریف زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$I_{55} = \int_0^s \frac{x^2}{I_b} dx \quad (22)$$

در نتیجه:

$$y_n \left[\frac{-E}{P} + \frac{h^2 n}{I_n} + \frac{1}{s^2} I_{55} \right] + h^2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i y_i}{I_i} = 0 \quad (23)$$

در رابطه‌ی بالا عبارت داخل کروشه، K_{nn} است و $h^2 \times (i/I_i)$ مقدار درایه ستون‌نام و سطر نام است. به این ترتیب ماتریس ضرایب تشکیل می‌شود. با قرار دادن n ، $|K| = 0$ جواب برای P به دست می‌آید که کوچک‌ترین آنها بار بحرانی ستون‌های سوله است.

$$K = \begin{bmatrix} A - 2I_1 & I_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ I_2 & A - 2I_2 & I_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_3 & A - 2I_3 & I_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & I_{n-1} & A - 2I_{n-1} & I_{n-1} & 0 \\ h^2/I_1 & 2h^2/I_2 & 3h^2/I_3 & 4h^2/I_4 & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (24)$$

اگر تعادل المان کوچکی از روی تکیه‌گاه در نظر گرفته شود، باتوجه به جهت انتخابی لنگر داخلی ستون در شکل (۷) می‌توان معادله (۲۶) را نوشت.

$$M_c(0) = -M_0 \quad (26)$$

$$(m_{cw} + m_{ce})_{II} = 0 \quad (16)$$

$$(m_{bw} + m_{be})_{II} = 0$$

بنابراین جملات لنگر مجازی در سازه (I) - که بارگذاری آن متقارن معکوس است - در رابطه (۱۴) تعیین کننده است. اما در سازه کمانش یافته، لنگر داخلی نقاط مختلف ستون و تیر به صورت زیر است: (راس سوله: نقطه عطف تغییر شکل)

$$M_c = P y \quad (17)$$

$$M_b = \frac{P y_n}{s} x \quad (18)$$

M : لنگر داخلی اعضا (در اثر کمانش ناشی از بار P روی سرستون‌ها)

مبدأ محور x در تیرها، راس قاب شیب‌دار است، S نیز طول تیر می‌باشد. چون در سازه متقارن معکوس (I)، لنگر در راس سوله، صفر است و عکس العمل افقی پای دو ستون برابر با 0.5 است، می‌توان نوشت:

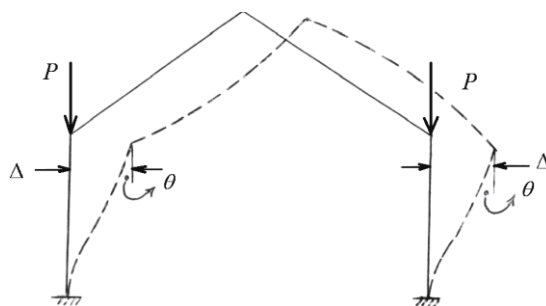
$$(m_{cw} + m_{ce})_I = 2 \times (0.5x) = x \quad (19)$$

۴- تعیین بار کمانش خمشی ستون‌های قاب تک‌دهانه‌ی شیب‌دار، متقارن و با تکیه‌گاه‌های گیردار که در برابر حرکت جانبی آزاد است (شکل (۶)).

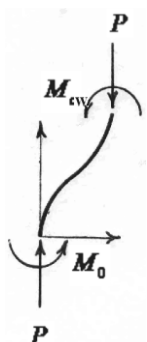
تابع لنگر خمشی داخلی ستون و رابطه آن با توابع تغییر شکل و ممان اینرسی:

$$M_c = P y - M_0 = -EI_c y'' \quad (25)$$





شکل (۶): وضعیت پیش از کمانش (خطوط توپر) و پس از کمانش (خط چین)



ب) دیاگرام آزاد بخشی از ستون چپ



الف) دیاگرام آزاد بخشی از ستون راست

شکل (۷): دیاگرام آزاد ستون‌های کمانش یافته

بقیه‌ی سطور با توجه به معادله (۳۰) برای هر i به دست می‌آید، اکنون دستگاه معادلاتی شامل $n-1$ معادله و n متغیر به دست آمده است $(y_i, 1 \leq i \leq n)$ ، با کمک $n-1$ معادله، $n-1$ سطر از ماتریس ضرایب دستگاه معادلات حاصل می‌شود، تنها یک سطر از آن ماتریس باقی می‌ماند که ذیلاً به دست می‌آید:

برای به دست آوردن معادله‌ی مورد نیاز مشابه آنچه قبلاً برای قاب با تکیه‌گاه‌های مفصلی گفته شد، طبق شکل (۸) داریم:

$$1^* \times y_n = \int \frac{M_c}{EI_c} \sum m_c dx + \int \frac{M_b}{EI_b} \sum m_b dx \quad (32)$$

$$M_b = \frac{Py_n - M_0}{s} x \quad (33)$$

با توجه به شکل (۹)، مبدا محور x در رابطه اخیر راس سوله است.

$$M_b = V x \quad (34)$$

مقدار تابع لنگر خمشی ستون در محل تکیه‌گاه $(x=0)$ برابر با $-M_0$ است. پس:

$$M_0 = EI_0 y''_0 = \frac{EI_0}{h^2} (y_{-1} - 2y_0 + y_1) = \frac{EI_0}{h^2} (y_{-1} - 2 \times 0 + y_1) \quad (27)$$

از طرفی دوران در تکیه‌گاه گیردار صفر است، یعنی:

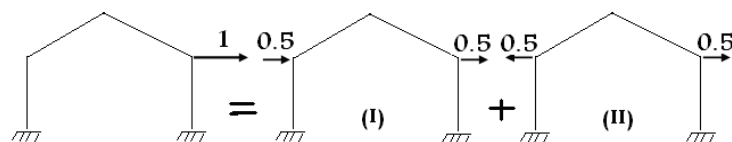
$$y'_0 = 0 \Rightarrow 0 = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} \Rightarrow y_{-1} = y_1 \quad (28)$$

$$M_0 = \frac{2EI_0}{h^2} y_1 \quad (29)$$

$$M_c(x) = M_c(ih) = Py_i + \frac{-2EI_0 y_1}{h^2} = -EI_i \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} \quad (30)$$

سطر اول ماتریس ضرایب از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$y_1 \left(\frac{Ph^2}{E} - 2I_0 - 2I_1 \right) + (I_1) y_2 = 0 \quad (31)$$



شکل (۸): اعمال بار مجازی و استفاده از اصل برهم نهی

$$V_R = \frac{P\Delta - M_0}{s \times \cos \alpha}$$

$$V = V_R \cos \alpha$$

شکل (۹): دیاگرام آزاد و تغییر شکل تیر در اثر کماتش ستون‌های سوله

بر این مبنا بدست آمده‌اند که راس سوله در V^* و m_b سازه‌ی (I) نقطه‌ی عطف است (لنگر خمشی داخلی مساوی با صفر است). m_0 لنگر مجازی در پای ستون‌های سازه‌ی (I) بوده و مبدا محور x در ستون‌ها پای ستون و در تیرها تاج سوله است. بنابراین رابطه‌ی کار مجازی به صورت زیر نوشته می‌شود شکل (۱۱):

$$1^* \times y_n = \int_0^l \frac{(Py - M_0)(x - 2m_0)}{EI_c} dx + \int_0^s \frac{(\frac{Py_n - M_0}{s} x)(\frac{1 - 2m_0}{s} x)}{EI_b} dx \quad (39)$$

$$Ey_n = \int_0^l (Py - M_0) \frac{x}{I_c} dx - 2m_0 \int_0^l \frac{(Py - M_0) dx}{I_c} + \frac{(Py_n - M_0)(1 - 2m_0)}{s^2} \int_0^s \frac{x^2}{I_b} dx \quad (40)$$

تعریف می‌کنیم:

$$I_{00} = \int_0^l \frac{dx}{I_c} ; \quad I_{11} = \int_0^l \frac{x}{I_c} dx ; \quad (41)$$

$$I_{55} = \int_0^s \frac{x^2}{I_b} dx$$

اگر جهت لنگر داخلی تیر راست با تیر چپ و ستون راست با ستون چپ در قاب کماتش یافته - که دارای تقارن معکوس است - هم علامت فرض شود، آنگاه به خاطر تقارن مستقیم در سازه (II)، لنگر داخلی تیر راست با تیر چپ و ستون راست با ستون چپ مختلف‌العلامه خواهند بود. هنگام محاسبه‌ی $\sum \int \frac{mM}{EI} dx$ برای کل سازه، مقدار این عبارت برای سازه‌ی (II) - که دارای بارگذاری متقارن است - صفر می‌شود. پس لنگرهای مجازی داخلی سازه‌ی (I) در نظر گرفته می‌شود (شکل (۸)).

پس می‌توان نوشت:

$$\sum m_c = 2 \times (0.5x - m_0) = x - 2m_0 \quad (35)$$

از طرفی با توجه به صفر بودن لنگر خمشی در راس قاب شیب‌دار برای سازه‌ی (I):

$$V^* = \frac{0.5l - m_0}{s \cos \alpha} \quad (36)$$

با توجه به دیاگرام آزاد قسمتی از تیر (شکل (۱۰)):

$$m_b = V^* x \cos \alpha = \frac{0.5l - m_0}{s} x \quad (37)$$

$$\sum m_b = 2 \times \left(\frac{0.5l - m_0}{s} x \right) = \frac{1 - 2m_0}{s} x \quad (38)$$

$$E y_n = \sum_{i=1}^n \frac{P h y_i}{I_i} (i h - 2 m_0) + M_0 (-I_{11} + 2 m_0 I_{00} - \frac{1 - 2 m_0}{s^2} I_{55}) + \frac{P y_n}{s^2} (1 - 2 m_0) I_{55} \quad (43)$$

از طرفی:

$$M_0 = -\frac{2 E I_0}{h^2} y_1 \quad (44)$$

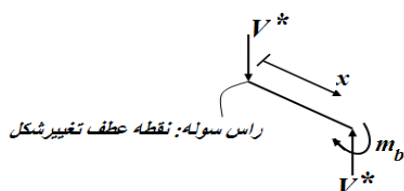
پس:

$$y_n \left[-E + \frac{P h}{I_n} (n h - 2 m_0) + \frac{P}{s^2} (1 - 2 m_0) I_{55} \right] + y_1 \left[\frac{P h}{I_1} (h - 2 m_0) - \frac{2 E I_0}{h^2} (-I_{11} + 2 m_0 I_{00} - \frac{1 - 2 m_0}{s^2} I_{55}) \right] + P h \sum_{i=2}^{n-1} \frac{y_i}{I_i} (i h - 2 m_0) = 0 \quad (45)$$

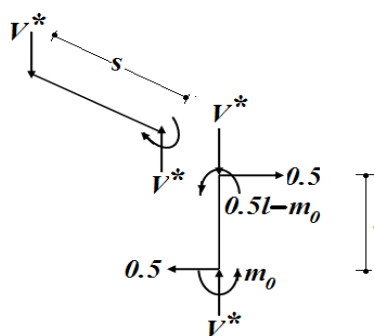
$$m_b = V^* x \cos \alpha = \frac{0.5 l - m_0}{s} x \quad (48)$$

$$\frac{\partial m_c}{\partial m_0} = -1 \quad (49)$$

$$\frac{\partial m_b}{\partial m_0} = -\frac{x}{s}$$



الف) دیاگرام آزاد جداگانه‌ی ستون و تیر



ب) دیاگرام آزاد قسمتی از تیر، جدا شده از راس سوله و به طول x

شکل (۱۰): دیاگرام‌های آزاد در بارگذاری مجازی

و آنگاه با در نظر گرفتن $(1 \leq i \leq n \text{ و } dx=h \text{ و } x=ih)$ انتگرال‌های معین به سیگما تبدیل شده، می‌توان نوشت:

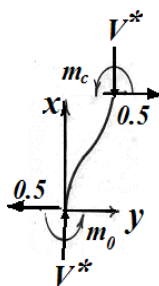
$$E y_n = P h^2 \sum \frac{i y_i}{I_i} - M_0 I_{11} - 2 m_0 P h \sum \frac{y_i}{I_i} + 2 m_0 M_0 I_{00} + \frac{P y_n}{s^2} (1 - 2 m_0) I_{55} - \frac{M_0}{s^2} (1 - 2 m_0) I_{55} \quad (42)$$

با فاکتورگیری از جملات مشابه می‌توان به معادله زیر رسید:

به این ترتیب درایه های سطر n ام ماتریس ضرایب به دست می آید. البته m_0 هنوز نامعلوم است. در ادامه تعیین می‌شود. با توجه به شکل (۱۰) و (۱۱) می‌توان نوشت:

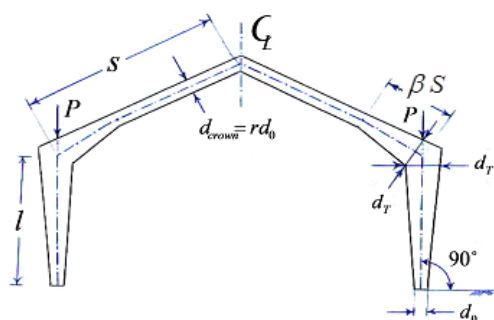
$$m_c = 0.5 x - m_0 \quad (46)$$

$$V^* = \frac{0.5 l - m_0}{s \cos \alpha} \quad (47)$$



شکل (۱۱): دیاگرام آزاد قسمتی از ستون در بارگذاری مجازی

نسبت طول قسمت ماهیچه‌ای تیر، به کل طول آن s .
به دلیل محدودیت در متن مقاله از آوردن توضیحات
تکمیلی مربوط به ترسیم نمودارهای تعیین ضریب طول
موثر خودداری می‌شود (شکل (۱۲)).



شکل (۱۲): مشخصات هندسی قاب شیب‌دار همراه با وضعیت
بارهای وارده در تحلیل

۶- مثال‌های حل شده

مثال (۱): ضریب طول مؤثر ستون‌های قاب زیر خواسته
شده است، شدت بار گسترده متقارن 820 kg/cm^2 می‌باشد،
طول تیر 670 سانتیمتر و زاویه‌ی تیر با افق α است (شکل
(۱۳)).

۱-الف) حل مثال با تحقیق حاضر

از نمودار با شرایط $\beta=1$ و $\gamma=2$ استفاده می‌کنیم
(شکل (۱۴)). در این سوله $r = \frac{d_{\text{crown}}}{d_0} = \frac{36}{20} = 1.8$ به
علاوه $n = \frac{s}{l} = \frac{670}{600} = 1.116$ در نتیجه: $K_\gamma = 1.06$.

چون دوران پای تکیه‌گاه گیردار صفر است و سازه متقارن
است، برای نصف سازه می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial U/2}{\partial m_0} = 0 = \int_0^l \frac{-1 \times (0.5x - m_0)}{EI_c} dx + \int_0^s \frac{\left(-\frac{x}{s}\right) \times \left(\frac{0.5l - m_0}{s} x\right)}{EI_b} dx \quad (50)$$

U انرژی ارتجاعی کل سازه در خمش است. پس با توجه
به تعریف‌های معادله‌ی (۴۱):

$$m_0 = 0.5 \times \frac{II_{55} + s^2 II_{11}}{II_{55} + s^2 II_{00}} \quad (51)$$

۵- ضریب طول موثر مبنای تعیین بار بحرانی ستون‌ها و رسم نمودارها

از آنجایی که بار بحرانی کمیتی بی‌بعد نیست و مقدار آن در
واحدهای گوناگون (تن، کیلوگرم، ...) متفاوت است، برای
ترسیم نمودار کمیت مناسبی نیست. از سوی دیگر این
کمیت قابل تعریف برحسب کمیت بدون بعد ضریب طول
موثر است، می‌توان نمودارهای تعیین ضریب طول موثر
برای کمانش ستون‌ها ترسیم کرد. کمترین مقدار غیرصفر
 P که در تساوی دترمینان ماتریس ضرایب با صفر صدق
کند، P_{cr} است. به این ترتیب ضریب طول موثر (K_γ) نیز
تعیین می‌شود. برای زوج معین γ و β یک دستگاه متعامد
رسم می‌شود که در آن، محور افقی، نسبت s/l و محور
قائم، K_γ است. (γ نسبت عمق مقطع ستون در بالای آن
به عمق مقطع ستون در پای آن، منهای یک است و β

۱-ب) حل مثال با روش Lee و همکارانش [۱۸]

از آنجا که تیر متصل به بالای ستون نیز دارای مقطع متغیر است باید ممان اینرسی معادل آن به کمک روابط و منحنی‌هایی که در مرجع [۱۸] آمده‌است، تعیین شود. برای این کار ابتدا مقادیر زیر را به دست می‌آوریم:

$$\gamma_{5-9} = \frac{d_5}{d_9} - 1 = \frac{60}{36} - 1 = 0.666$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{300}{600}\right) = 26.56^\circ$$

نیروی محوری تیر:

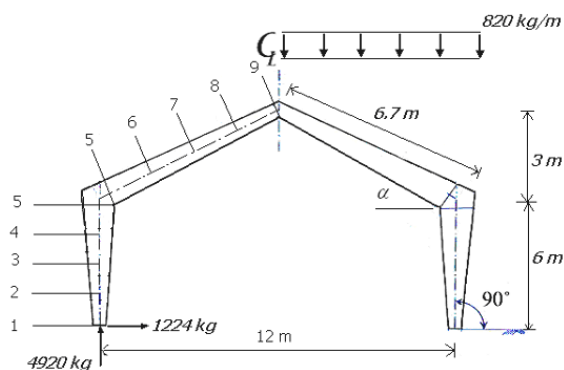
$$P_5 = 4920 \sin \alpha + 1224 \cos \alpha = 3295 \text{ kg}$$

$$P_{\text{exo}} = \frac{\pi^2 EI_{x9}}{b_T^2} = \frac{\pi^2 \times 2.1 \times 10^6 \times 5552}{670^2} = 256341 \text{ kg}$$

$$\frac{P_5}{P_{\text{exo}}} = \frac{3295}{256341} = 0.0125$$

γ تیر مساوی با ۰/۶۶۶ و نسبت P/P_{exo} مساوی با ۰/۰۱۲۵ است و نیروی محوری تیر، فشاری (C) است. پس با استفاده از شکل (۱۵) و (۱۶) داریم:

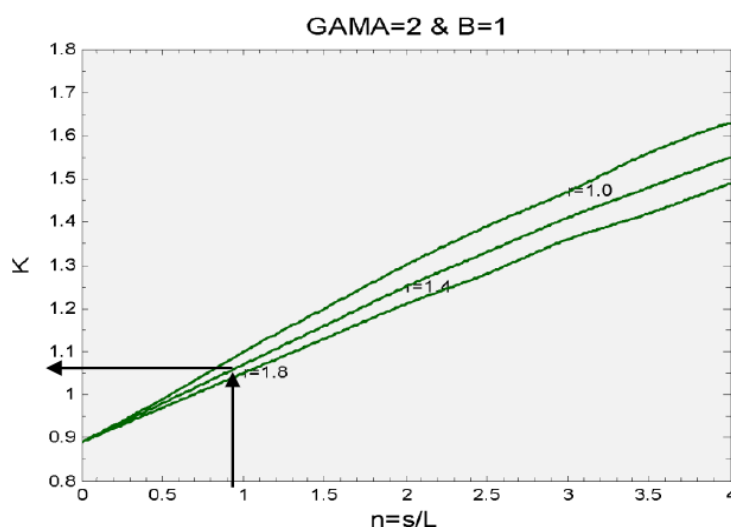
$$C_{AB} = 0.38, C_{BA} = 0.63, K_{AA} = 2.1 \left(\frac{4EI_9}{b_T} \right)$$



شماره مقطع ستون	d cm	A cm ²	I _x cm ⁴	S _x cm ³	r _x cm
۱	۲۰	۲۰	۱۵۲۷	۱۴۵	۸/۷
۲	۳۰	۲۴	۳۶۹۱	۲۳۸	۱۲/۴
۳	۴۰	۲۸	۷۰۵۴	۳۴۴	۱۵/۹
۴	۵۰	۳۲	۱۱۸۱۷	۴۶۳	۱۹/۲
۵	۶۰	۳۶	۱۸۱۸۱	۵۹۶	۲۲/۴
شماره مقطع تیر	d cm	A cm ²	I _x cm ⁴	S _x cm ³	r _x cm
۵	۶۰	۳۶	۱۸۱۸۱	۵۹۶	۲۲/۴
۶	۵۴	۳۳/۶	۱۴۱۵۹	۵۱۵	۲۰/۵
۷	۴۸	۳۱/۲	۱۰۷۴۳	۴۴۷	۱۸/۵
۸	۴۲	۲۸/۸	۷۸۸۸	۳۶۷	۱۶/۵
۹	۳۶	۲۶/۴	۵۵۵۲	۳۰۰	۱۴/۵

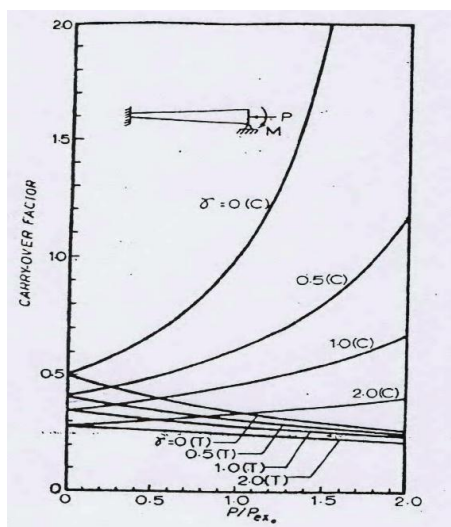
شکل (۱۳): شکل هندسی و مشخصات مقاطع در یک مثال

نمونه

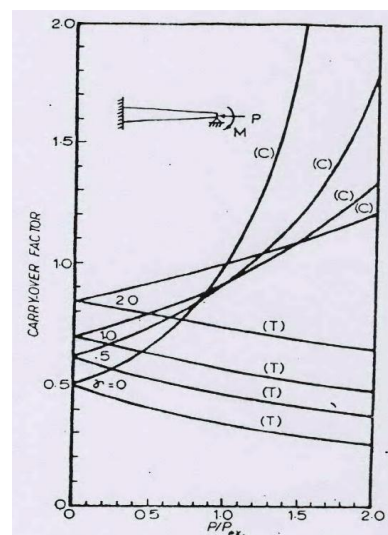


شکل (۱۴): یکی از نمودارهای ضریب طول مؤثر برای قاب آزاد جانبی تکیه‌گاه مفصلی ($\gamma=۲$ و $\beta=۱$)



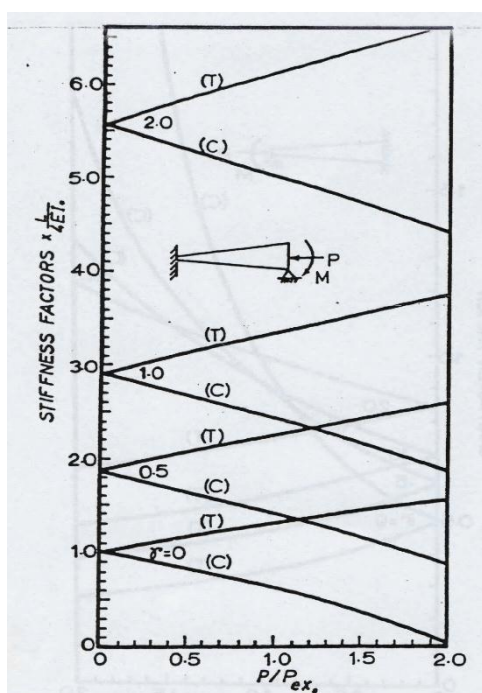


ب) وقتی که انتهای کوچکتر گیردار است.



الف) وقتی که انتهای بزرگتر گیردار است.

شکل (۱۵): ضریب انتقال لنگر [۱۸]



شکل (۱۶): مقادیر $K_{AA} \times b/(4EI_0)$ (انتهای کوچکتر گیردار)

[۱۸]

مثال (۲): قاب مثال قبل را برای حالتی که پای ستون‌ها گیردار است و بار قائم به صورت متمرکز روی سر ستون‌ها واقع شده است در نظر گرفته، ضریب طول مؤثر برای این حالت با تحقیق حاضر و روش مرجع [۱۸] تعیین می‌شود.

رابطه‌ی ممان اینرسی معادل بالایی:

$$\frac{P_5}{P_{exo}} = \frac{3295}{256341} = 0.0125$$

برای ستون داریم:

$$\gamma_{1-5} = \frac{d_5}{d_1} - 1 = 2$$

به علاوه:

$$G_T = \frac{b_T I_0}{I I_T} = \frac{670 \times 1527}{600 \times 11824} = 0.144$$

مقدار تئوری G_B برای تکیه‌گاه مفصلی بینهایت است. بنابراین با استفاده از نمودار شکل (۱۷) برای $\gamma=2$ داریم:

$$K_\gamma = 0.99$$

بنابراین بار بحرانی کمانشی ستون عبارت است از:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_0}{(K_\gamma l)^2} = \frac{\pi^2 \times 2.1e6 \times 1527}{(0.99 \times 600)^2} = 87914 \text{ kg}$$

$$\Rightarrow q_{cr} = \frac{87914}{6} = 14652 \text{ kg/m}$$

۲-ب) روش مرجع [۱۸]

چون مقدار نیروی محوری تیر در مثال قبلی اندک بود، محاسبات تعیین G_T در این مثال، نزدیک به مثال قبلی است.

$$C_{AB} = 0.38, C_{BA} = 0.63, K_{AA} = 2.1 \left(\frac{4EI_9}{b_T} \right)$$

رابطه‌ی تعیین ممان اینرسی تیر معادل بالایی:

$$I_T = \frac{670}{3E} \times 2.23 \left(\frac{4E \times 5552}{670} \right) (1 - 0.38 \times 0.63) = 12555 \text{ cm}^4$$

برای ستون ۱-۵ داریم:

$$\gamma_{1-5} = \frac{d_5}{d_1} - 1 = 2$$

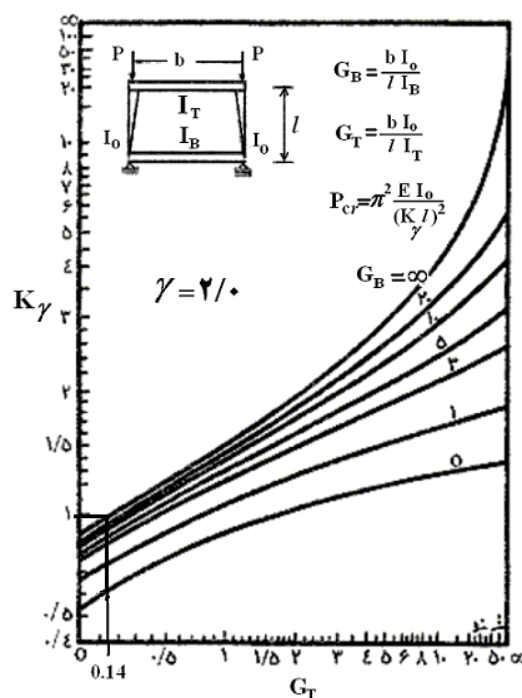
به علاوه:

$$G_T = \frac{b_T I_0}{I_T} = \frac{670 \times 1527}{600 \times 12555} = 0.136$$

$$G_B = 0$$

از شکل (۱۷) به دست می‌آید:

$$K_\gamma = 0.61$$



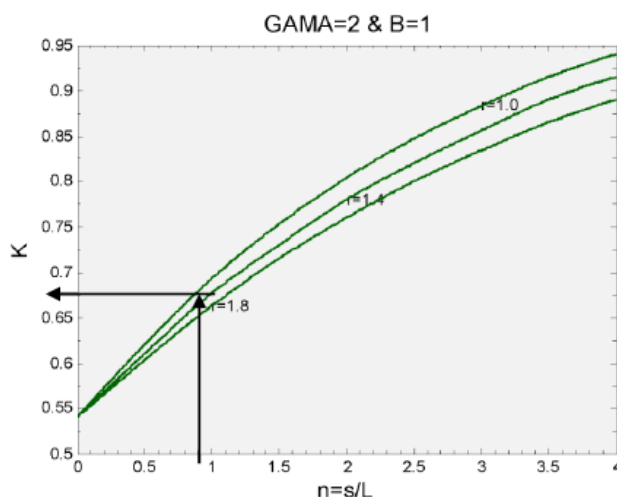
شکل (۱۷): نمودارهای ضریب طول مؤثرستون با $\gamma=2$: آزاد در برابر حرکت جانبی [۲۲]

۲-الف) حل مثال با تحقیق حاضر (شکل (۱۸)).

با استفاده از نمودار قاب آزاد در برابر حرکت جانبی و تکیه‌گاه گیردار و $\gamma=2$ و $\beta=1$ داریم:

$$r=1.8, n=1.116$$

$$\Rightarrow K_\gamma = 0.67$$



شکل (۱۸): یکی از نمودارهای ضریب طول مؤثر برای قاب آزاد جانبی تکیه‌گاه گیردار ($\gamma=2$ و $\beta=1$)



۶- نتیجه گیری

در این مقاله تعیین بار کمانش خمشی ستون‌های با مقطع متغیر با روشی خاص برای بررسی کمانش درون صفحه قاب ارائه گردیده است. مسئله‌ی مورد نظر به صورت قاب یک دهانه متقارن با تکیه‌گاه‌های مفصلی یا گیردار انجام شده است. تحلیل مسئله بر اساس روش تفاضلات محدود و روش کار مجازی بیان شده است. روش تفاضلات محدود یک روش تقریبی است که با افزایش تعداد تقسیمات اعضا دقت تحلیل بالاتر می‌رود. از حل مثال‌ها چنین برداشت می‌شود که اولاً در همه‌ی مثال‌ها نتیجه‌ی روش پیشنهادی، ضریب طول مؤثر را از روش دیگران بیشتر بدست می‌دهد (به عبارت دیگر بار بحرانی کمتری بدست می‌آید) و این بخاطر این است که روش تفاضل محدود، در تعیین بار بحرانی، یک روش کران پایین است. ثانیاً اختلاف ناچیز جوابهای هر مثال از روش پیشنهادی با روشهای دیگر نشان‌دهنده‌ی مناسب بودن روش مورد استفاده است. ضریب طول مؤثر در قاب‌های مورد بحث به پارامترهای α , β , n و γ وابسته می‌باشد و به سایر پارامترها، مثلاً شیب تیر مورب (با شرط ثابت ماندن چهار پارامتر فوق) وابسته نیست.

۹- مراجع

- [1] Timoshenko, S.P. (1908), "Buckling of Bars of Variable Cross Section", Bull. Polytechnic Inst., Kiev, U.S.S.R.
- [2] Morley, A. (1917), "Critical Loads for Long Tapering Struts", Engineering, London, England, Vol. 104, pp. 295-298.
- [3] Dinnik, A.N. (1929 and 1932), "Design of Columns of Varying Cross Section", Translated from Russian by M. Majetz, Transactions, ASME, Vol. 51-52.
- [4] Gere, J.M. and Carter, W.O. (1962), "Critical Buckling Loads for Tapered Columns", Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 88, pp. 1-11.
- [5] Iremonger, M.J. (1980), "Finite Difference Buckling Analysis of Nonuniform Columns", Computers and Structures, Vol. 12, pp. 741-748.
- [6] Karabalis, D.L. and Beskos, D.E. (1983), "Static, Dynamic and Stability Analysis of Structures Composed of Tapered Beams", Computers and Structures, Vol. 16, pp. 731-748.
- [7] Brown C.J. (1984), "Approximate Stiffness Matrix for Tapered Beams", Journal of Structural Engineering, Vol. 110, pp. 3050-3055.

[8]-Ermopoulos, J.C. and Kounadis, A.N. (1985), "Stability of Frames with Tapered Built-up Members", Journal of Structural Engineering, Vol. 111, pp. 1979-1992

[9] Ermopoulos, J.C. (1986), "Buckling of Tapered Bars under Stepped Axial Loads", Journal of Structural Engineering, Vol. 112, pp. 1346-1354.

[10] Banerjee, J.R. and Williams, F.W. (1986), "Exact Bernoulli-Euler Static Stiffness Matrix for a range of tapered beam-columns", International Journal for Numerical Method in Engineering, 23(9), 1615-1628.

[11] Yang, Y.B. and Yau, J.D. (1987), "Stability of Beams with Tapered I-Sections", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 113, pp. 1337-1357.

[12] Bradford, M.A. (1988), "Elastic Buckling of Tapered Monosymmetric I-Beams", Journal of Structural Engineering, Vol. 114, pp. 977-996.

[13] Williams, F.W. and Aston, G. (1989), "Exact or Lower Bound Tapered Columns Buckling Loads", ASCE, Vol. 115, pp. 1088-1100.

[14] Al-Gahtani, H. (1996), "Exact Stiffnesses for Tapered Members", Journal of Structural Engineering, Vol. 122, pp. 1234-1239.

[15] Asgarian, B., Soltani, M. and Mohri F. (2013), "Lateral-Torsional Buckling of Tapered Thin-Walled Beams with Arbitrary Cross-Sections", Thin-Walled Structures, Vol. 62, pp. 96-108.

[16] Bradford, M.A. and Valipour, H.R. (2012), "A new Shape Function for Tapered Three-Dimensional Beams with Flexible Connections", Journal of constructional steel Research, Vol. 70, pp. 43-50.

[17] Konstantakopoulos, T.G., Raftoyiannis, I.G. and Michaltsos, G.T. (2012), "Stability of Steel Columns with Non-Uniform Cross-Sections", The Open Construction and Building Technology Journal, Vol. 6, pp. 1-7.

[18] Lee, G.C., Morrell, M.L. and Ketter, R.L. (1972), "Design of Tapered Members", Welding Research Council Bulletin, No. 173.

[19] Irani, F. (1988), "Stability of One Bay Symmetrical Frames with Non-Uniform Members", Journal of Engineering. Islamic Republic of Iran, Vol. 1, pp. 193-200.

[20] Bazeos, N. and Karabalis, D.L. (2006), "Efficient Computation of Buckling Loads for Plane Steel Frames with Tapered Members", Engineering Structures, Vol. 28, pp. 771-775.

[21] Saffari, H., Rahgozar, R. and Jahanshahi, R. (2008), "An Efficient Method for Computation of Effective Length Factor of Columns in a Steel Gabled Frame with Tapered Members", Journal of Constructional Steel Research, Vol. 64, pp. 400-406.

[۲۲] ازهری، م. و میرقادر، ر. (۱۳۸۲)، "طراحی سازه‌های فولادی"، کتاب جلد ۲، انتشارات ارکان اصفهان، ص. ۲۴۵-۲۴۷.

